Matematica Generale a.a. 2018/19
Teoremi dimostrati nel corso.

ATTENZIONE!!!!. Nel corso di matematica generale sono stati presentati teoremi per i quali è richiesta la conoscenza del solo enunciato e teoremi dei quali è stata data anche la dimostrazione.
Per conoscere l'elenco completo dei teoremi enunciati nel corso, e quindi richiesti in sede di prova d'esame, lo studente può consultare i registri delle lezioni, disponibili alla sezione "Link ai registri delle lezioni" del sito:
https://elearning.ec.unipi.it/course/view.php?id=867
In questo documento sono riportati esclusivamente i teoremi per i quali è richiesta anche la dimostrazione.

1 Funzioni ad una variabile

Teorema 1.1 (Teorema della permanenza del segno) *Sia* $f : X \to \mathbb{R}, \quad X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in X$ *punto di accumulazione di* X. *Se* $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \neq 0$, *allora esiste un intorno* I *del punto* x_0, *tale che* f *assume lo stesso segno di* ℓ *per ogni* $x \in I, \ x \neq x_0$.

Dimostrazione. Dalla definizione di limite si ha che per ogni intorno di ℓ di raggio $\epsilon > 0$, esiste un intorno I di raggio $\delta > 0$, $I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, tale che $\forall x \in I, \ x \neq x_0$, si ha $\ell - \epsilon < f(x) < \ell + \epsilon$.
Se $\ell > 0$, la tesi è dimostrata scegliendo $\epsilon \leq \ell$. In questo caso infatti, esiste un intorno I tale che $0 \leq \ell - \epsilon < f(x)$ per ogni $x \in I$, $x \neq x_0$.
Analogamente, se $\ell < 0$, la tesi è dimostrata scegliendo $\epsilon \leq -\ell$. In questo caso esiste un intorno I tale che $f(x) < \ell + \epsilon \leq 0$ per ogni $x \in I$, $x \neq x_0$. ♣

Teorema 1.2 (Teorema degli zeri) *Sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua tale che* $f(a)f(b) < 0$. *Esiste allora un punto* $\bar{x} \in (a, b)$ *tale che* $f(\bar{x}) = 0$.

Dimostrazione. Per il Teorema di Weierstrass, f ammette valore massimo e minimo e tutti i valori compresi tra il massimo ed il minimo. Indichiamo con M il valore massimo e con m il valore minimo. Poiché $f(a)f(b) < 0$ $f(a)$ ed $f(b)$ hanno segno discorde. Di conseguenza, poiché $m \leq f(a)$ e $m \leq f(b)$ si ha $m < 0$; analogamente, poiché $M \geq f(a)$ e $M \geq f(b)$, si ha $M > 0$. Poiché f assume tutti i valori compresi tra $m < 0$ e $M > 0$, esiste un punto $\bar{x} \in (a, b)$ tale che $f(\bar{x}) = 0$. ♣

Teorema 1.3 (Rapporto tra derivabilità e continuità) *Sia data una funzione* $f : X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X$ *punto interno. Se* f *è derivabile in* x_0 *allora* f *è continua in* x_0.

Dimostrazione. Dobbiamo calcolare $\lim_{x \to x_0} f(x)$. Per definizione di limite, $x \neq x_0$ e quindi

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} f(x) &= \lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0) + f(x_0)) \\ &= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) + f(x_0) \right) \end{aligned}$$

Per la continuità delle funzioni $y(x) = f(x_0)$ e $g(x) = x - x_0$ e per l'ipotesi di derivabilità della funzione f, possiamo applicare i teoremi sulla somma e prodotto dei limiti da cui risulta

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} f(x) &= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) + f(x_0) \right) \\ &= f'(x_0) \cdot 0 + f(x_0) = f(x_0) \end{aligned}$$

ovvero, f è continua in x_0. ♣

Teorema 1.4 (Condizione necessaria di ottimalità del I ordine o Teorema di Fermat) *Sia* $f : X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X$, *punto interno ed* f *derivabile in* x_0. *Se* x_0 *è punto di massimo o di minimo relativo per* f, *allora* $f'(x_0) = 0$.

Dimostrazione. Per assurdo supponiamo $f'(x_0) \neq 0$; dalla definizione di derivata si ha

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Se $f'(x_0) > 0$, per il teorema della permanenza del segno, esiste un intorno I_{x_0} di x_0 tale che $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$ per ogni $x \in I_{x_0}$, $x \neq x_0$. Ne consegue che

$$\begin{cases} f(x) > f(x_0) & \text{per} \quad x > x_0,\, x \in I_{x_0} \\ f(x) < f(x_0) & \text{per} \quad x < x_0,\, x \in I_{x_0} \end{cases}$$

ovvero x_0 non può essere né un punto di massimo né un punto di minimo e questo contraddice l'ipotesi. In modo del tutto analogo si dimostra che non può essere $f'(x_0) < 0$, da cui la tesi. ♣

Teorema 1.5 (Teorema di Rolle) *Sia f una funzione definita e continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ e derivabile nell'intervallo aperto (a,b), con $f(a)=f(b)$. Esiste allora almeno un punto $x_0 \in (a,b)$ tale che $f'(x_0)=0$.*

Dimostrazione. Poiché f è definita e continua in un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$, per il teorema di Weierstrass, f assume massimo e minimo valore. Indichiamo con M ed m rispettivamente il massimo ed il minimo valore di f.
Se $M=m$, f è costante e quindi qualsiasi punto x_0 interno all'intervallo soddisfa la tesi del teorema in quanto la derivata di una costante è la funzione nulla.
Se $M \neq m$, poiché $f(a)=f(b)$, f assume almeno uno dei due valori M o m in un punto interno x_0 e quindi, per il Teorema di Fermat, si ha $f'(x_0)=0$. ♣

Teorema 1.6 (Teorema di Lagrange) *Sia f una funzione definita e continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ e derivabile nell'intervallo aperto (a,b). Allora esiste almeno un punto $x_0 \in (a,b)$ tale che $f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

Dimostrazione. Consideriamo la seguente funzione ausiliaria

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

e dimostriamo che F soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle.
Osserviamo che :

- $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ è un polinomio di I grado e quindi è una funzione continua e derivabile;

- f è continua nell'intervallo $[a,b]$ e derivabile nell'intervallo aperto (a,b) per ipotesi.

Di conseguenza, la funzione F è continua nell'intervallo $[a,b]$ perché differenza di funzioni continue e derivabile nell'intervallo aperto (a,b) perché differenza di funzioni derivabili in (a,b).
Verifichiamo che $F(a)=F(b)$.

$$F(a)=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a)=f(a)$$
$$F(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)=f(b)-f(b)+f(a)=f(a)$$

Poiché le ipotesi del Teorema di Rolle sono verificate, esiste almeno un punto $x_0 \in (a,b)$ tale che $F'(x_0) = 0$. Essendo $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ risulta

$$F'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

da cui $f'(x_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. ♣

Teorema 1.7 (Conseguenze del Teorema di Lagrange.) *Sia f una funzione definita e continua in un intervallo I e derivabile nei punti interni all'intervallo I.*
i) se $f'(x) = 0$ in ogni punto x interno all'intervallo I, allora f è costante in I.
ii) se $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) in ogni punto x interno all'intervallo I, allora f è crescente (decrescente) in I.

Dimostrazione. i) Siano x^* un arbitrario punti di I. Si deve dimostrare che f è costante, ovvero che $f(x^*) = f(\bar{x})$ per ogni $\bar{x} \in I$. Supponiamo dapprima che $x^* < \bar{x}$: f è continua nell'intervallo $[x^*, \bar{x}]$ e derivabile in $(x^*, \bar{x})$. Applicando il teorema di Lagrange alla funzione f nell'intervallo $[x^*, \bar{x}]$, si ottiene che esiste un punto x_0 tale che

$$f'(x_0) = \frac{f(\bar{x}) - f(x^*)}{\bar{x} - x^*}, x_0 \in (x^*, \bar{x})$$

Poiché x_0 è un punto interno dell'intervallo I, per ipotesi $f'(x_0) = 0$ da cui segue $\dfrac{f(\bar{x}) - f(x^*)}{\bar{x} - x^*} = 0$ e $f(\bar{x}) = f(x^*)$. Se $\bar{x} < x^*$, in modo del tutto analogo al caso $x^* < \bar{x}$, si applica il Teorema di Lagrange all'intervallo $[\bar{x}, x^*]$ e si ottiene $f(x^*) = f(\bar{x})$.
La tesi è dimostrata data l'arbitrarietà di x^*.
ii) Si deve dimostrare che f è crescente in I ovvero che $\forall x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$, risulta $f(x_1) < f(x_2)$. Applicando il teorema di Lagrange alla funzione f nell'intervallo $[x_1, x_2]$, si ha che esiste un punto $x_0 \in (x_1, x_2)$ tale che $f'(x_0) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. Tenendo conto dell'ipotesi $f'(x_0) > 0$ si ottiene $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$ e quindi $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) < f(x_2)$. La tesi è dimostrata data l'arbitrarietà di x_1, x_2. (La dimostrazione per il caso ($f'(x) < 0$) è del tutto analoga). ♣

1.1 Proprietà delle funzioni concave e convesse ad una variabile.

Teorema 1.8 *Sia $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, A aperto e convesso, f derivabile in A.*
i) Se f è una funzione convessa e $\bar{x} \in A$ è punto critico per f, allora $\bar{x}$ è punto di minimo assoluto di f su A.
ii) Se f è una funzione concava e $\bar{x} \in A$ è punto critico per f, allora $\bar{x}$ è punto di massimo assoluto di f su A.

Dimostrazione. i) Poiché f è convessa si ha

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \text{ per ogni } x, x_0 \in A$$

Poiché $\bar{x} \in A$, sostituendo il generico punto x_0 con il punto critico $\bar{x}$, la disuguaglianza precedente diventa

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) \text{ per ogni } x \in A$$

Poiché per ipotesi$f'(\bar{x}) = 0$ si ha $f(x) \geq f(\bar{x})$ per ogni $x \in A$ da cui la tesi.
ii) Analoga alla dimostrazione del punto i). ♣

Teorema 1.9 *Sia $f : A \to \mathbb{R}$, A aperto e sia $I = [a, b]$ un intervallo contenuto in A, f derivabile in A.*
i) Se f è convessa in $[a, b]$ e $\bar{x} \in I$ è punto di minimo relativo per f sull'intervallo I, allora $\bar{x}$ è punto di minimo assoluto di f su I.
ii) Se f è concava in $[a, b]$ e $\bar{x} \in I$ è punto di massimo relativo sull'intervallo I per f, allora $\bar{x}$ è punto di massimo assoluto di f su I.

Dimostrazione. **i)** Se $\bar{x}$ è un punto interno all'intervallo, allora per la condizione necessaria di ottimalità del I ordine $f'(\bar{x}) = 0$ e la tesi segue dal teorema precedente. Resta quindi da analizzare il caso $\bar{x} = a$ e $\bar{x} = b$.
Per assurdo si supponga che $\bar{x}$ non sia punto di minimo assoluto, ovvero che esista un punto $x^* \in I$, tale che $f(x^*) < f(\bar{x})$. Poiché f è convessa in I si ha

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \text{ per ogni } x, x_0 \in I$$

ed in particolare

$$f(x^*) \geq f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x^* - \bar{x})$$

da cui

$$f(x^*) - f(\bar{x}) \geq f'(\bar{x})(x^* - \bar{x})$$

Avendo supposto $f(x^*) - f(\bar{x}) < 0$ si ha

$$f'(\bar{x})(x^* - \bar{x}) < 0$$

Se $\bar{x} = a$ si ha $(x^* - \bar{x}) > 0$ e necessariamente $f'(\bar{x}) < 0$; di conseguenza f è decrescente in un intorno destro di $\bar{x} = a$ e questo contraddice l'ipotesi che $\bar{x}$ sia di minimo relativo.
Se $\bar{x} = b$, $(x^* - \bar{x}) < 0$ e necessariamente $f'(\bar{x}) > 0$; di conseguenza f è crescente in un intorno sinistro di $\bar{x} = b$ e questo contraddice l'ipotesi che $\bar{x}$ sia punto di minimo relativo.
ii) Analoga alla dimostrazione del punto i).

2 Funzioni a due variabili

Consideriamo una funzione $f : A \to \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}^2$, aperto, f di classe C^1 ed un punto $(x^0, y^0) \in A$. Denotiamo con $\nabla f(x^0, y^0)$ e con $H((x^0, y^0)$ rispettivamente il gradiente e la matrice Hessiana di f, calcolati in (x^0, y^0). Prima di presentare i teoremi enunciati e dimostrati a lezione, richiamiamo alcune fondamentali definizioni e risultati. Si consideri l'equazione parametrica di una curva $(x(t), y(t))\,,\ t \in \mathbb{R}$ e la restrizione di f su tale curva $\varphi(t) = f\left(x(t), y(t)\right)$.

- **Regola della catena**

$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(x(t), y(t)\right) x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(x(t), y(t)\right) y'(t)$$

o equivalentemente

$$\varphi'(t) = \nabla f\left(x(t), y(t)\right)^T \left(x'(t), y'(t)\right)$$

Esempio 2.1 Si consideri $f(x, y) = xy^2 + 3x - 4y$ ed una curva la cui equazione parametrica è $\left(x(t) = 5t, y(t) = -t^2 + 1\right),\ t \in \mathbb{R}$. Il gradiente di f è $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} y^2 + 3 \\ 2xy - 4 \end{pmatrix}$ e la restrizione di f sulla curva è data da: $\varphi(t) = f(x(t), y(t)) = 5t(-t^2 + 1)^2 + 3(5t) - 4(-t^2 + 1)$. Sfruttando la regola della catena si ottiene che la derivata di f lungo la restrizione è data da

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= \nabla f\left(5t, -t^2 + 1\right)^T \left(x'(t), y'(t)\right) \\
&= \left(\left(-t^2 + 1\right)^2 + 3,\ \ 2(5t)(-t^2 + 1) - 4\right) \begin{pmatrix} 5 \\ -2t \end{pmatrix} \\
&= \left(t^4 - 2t^2 + 4,\ \ -10t^3 + 10t - 4\right) \begin{pmatrix} 5 \\ -2t \end{pmatrix} \\
&= 25t^4 - 30t^2 - 8t + 20
\end{aligned}$$

- **Regola della catena e derivata direzionale**
  Si consideri un punto $(x^0, y^0) \in A$ ed una semiretta s uscente da (x^0, y^0) di direzione $d = (d_1, d_2)$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$, $t \geq 0$. Sia $\varphi_d(t)$ la restrizione di f su s ovvero $\varphi_d(t) = f(x^0 + td_1, y^0 + d_2)$. Applicando la regola della catena

$$\begin{aligned}
\varphi_d'(t) &= \nabla f\left(x^0 + td_1, y^0 + td_2\right)^T \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \\
\varphi_d'(0) &= \nabla f\left(x^0, y^0\right)^T \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

- **Derivata direzionale e direzioni di crescita e decrescita**
  - Se $\varphi_d'(0) > 0$ allora d è una direzione di crescita locale per f uscente dal punto (x^0, y^0).
  - Se $\varphi_d'(0) < 0$ allora d è una direzione di decrescita locale per f uscente dal punto (x^0, y^0).
- **Proprietà del gradiente**
  Sia $f : A \to \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}^2$, aperto, una funzione di classe C^1 ed un punto $(x^0, y^0) \in A$.
  - **I proprietà.** Sia $\nabla f(x^0, y^0) \neq (0, 0)$. La direzione $d = \nabla f(x^0, y^0)$ è la direzione di massima crescita locale per f uscente da (x^0, y^0), mentre la direzione $-\nabla f(x^0, y^0)$ è la direzione di massima decrescita locale.
  - **II proprietà.** Sia $\nabla f(x^0, y^0) \neq (0, 0)$. Il vettore $\nabla f(x^0, y^0)$, applicato nel punto (x^0, y^0), è ortogonale alla retta tangente alla curva di livello passante per (x^0, y^0).

Esempio 2.2 Sia data la funzione $f(x, y) = \log(3x) + y^3$ e si consideri la semiretta uscente dal punto $(1, 2)$ di direzione $d = (3, 4)$.
a) Sfruttando la regola della catena, calcolare $\varphi'(t)$ essendo $\varphi(t) = f(1+3t, 2+4t), t \geq 0$.
b) Stabilire se la direzione d è di crescita o di decrescita locale per f uscente da $(1, 2)$.
c) Determinare una direzione di decrescita locale per f uscente da $(1, 2)$, diversa dalla direzione $-\nabla f(1, 2)$.
d) Stabilire se la direzione $u = (0, 2)$ è di crescita o di decrescita locale per f uscente da $(1/2, 0)$.

a) $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} \\ 3y^2 \end{pmatrix}$, $\nabla f(1 + 3t, 2 + 4t) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{1 + 3t} \\ 3(2 + 4t)^2 \end{pmatrix}$,

$$\varphi'(t) = \left(\frac{1}{1 + 3t},\ 3(4 + 16t + 16t^2) \right) \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{3}{1 + 3t} + 12(4 + 16t + 16t^2)$$

b) Poiché $\varphi'(0) = \nabla f\,(1, 2)^T \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = (1, 12)^T \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 3 + 48 = 51 > 0$, $d = (3, 4)$ è una direzione di crescita locale per f uscente dal punto $(1, 2)$.
c) Tutte le direzioni $d = (d_1, d_2)$, tali che $\nabla f\,(1, 2)^T \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} < 0$ sono direzioni di decrescita locale per f uscenti da $(1, 2)$. Ad esempio $d = (0, -1)$.
d) In questo caso $\nabla f\,(1/2, 0)^T \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = (2, 0)^T \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$. Sfruttando la regola della catena si ha che

$$\varphi_u'(t) = \nabla f \left(\frac{1}{2}, 2t \right)^T \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 24t^2$$

Di conseguenza per $t > 0$ si ha $\varphi_u'(t) > 0$ e quindi u è una direzione di crescita locale per f uscente da $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

2.1 Massimi e minimi liberi, condizioni di ottimalità

Teorema 2.1 (Condizione necessaria di ottimalità del I ordine) *Si consideri una funzione $f : A \to \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, f di classe C^1. Se $(x^0, y^0) \in A$ è punto di massimo o di minimo relativo, allora $\nabla f(x^0, y^0) = (0, 0)$.*

Dimostrazione. Si osservi preliminarmente che essendo (x^0, y^0) un punto interno ad A, ogni direzione d uscente da (x^0, y^0) è ammissibile, nel senso che $\exists \epsilon > 0$ tale che ogni punto del tipo $(x^0 + td, y^0 + td)$ con $t \in (0, \epsilon)$, appartiene ad A.
Se $\nabla f(x^0, y^0) \neq (0, 0)$, la direzione ammissibile $u = \nabla f(x^0, y^0)$ risulta di crescita locale per f e quindi (x^0, y^0) non può essere di massimo relativo. La direzione ammissibile $u = -\nabla f(x^0, y^0)$ risulta di decrescita locale per f e quindi (x^0, y^0) non può essere di minimo relativo. Di conseguenza, si ha necessariamente che $\nabla f(x^0, y^0) = (0, 0)$. ♣

Teorema 2.2 (Condizione sufficiente di ottimalità del II ordine) *Si consideri una funzione $f : A \to \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, f di classe C^2.*
i) Se valgono le seguenti condizioni:

$$\nabla f\left(x^0, y^0\right) = (0, 0), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}\left(x^0, y^0\right) < 0, \ e \ \det H\left(x^0, y^0\right) > 0$$

allora $(x^0, y^0) \in A$ è punto di massimo relativo stretto per f.
ii) Se valgono le seguenti condizioni:

$$\nabla f\left(x^0, y^0\right) = (0, 0), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}\left(x^0, y^0\right) > 0, \ e \ \det H\left(x^0, y^0\right) > 0$$

allora $(x^0, y^0) \in A$ è punto di minimo relativo stretto per f.

Teorema 2.3 (Condizione necessaria di ottimalità del II ordine) *Si consideri una funzione $f : A \to \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, f di classe C^2.*
i) Se $(x^0, y^0) \in A$ è punto di massimo relativo, allora valgono le seguenti condizioni:

$$\nabla f\left(x^0, y^0\right) = (0, 0), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}\left(x^0, y^0\right) \leq 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}\left(x^0, y^0\right) \leq 0, \ e \ \det H\left(x^0, y^0\right) \geq 0$$

ii) Se $(x^0, y^0) \in A$ è punto di minimo relativo, allora valgono le seguenti condizioni:

$$\nabla f\left(x^0, y^0\right) = (0, 0), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}\left(x^0, y^0\right) \geq 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}\left(x^0, y^0\right) \geq 0, \ e \ \det H\left(x^0, y^0\right) \geq 0$$

Osservazione 2.1 Consideriamo un punto critico (x^0, y^0) per il quale o le derivate parziali seconde pure in (x^0, y^0) hanno segno discorde o $\det H\,(x^0, y^0) < 0$. In virtù della condizione necessaria di ottimalità del II ordine, (x^0, y^0) non è un punto né di massimo né di minimo relativo.

2.2 Proprietà delle funzioni concave e convesse

Definizione 2.1 Sia $f : A \to \mathbb{R}$ con A convesso.
i) f è **convessa** se per ogni $(x^0, y^0), (x, y) \in A$ si ha

$$f\left(\lambda(x^0, y^0) + (1-\lambda)\,(x, y)\right) \leq \lambda f(x^0, y^0) + (1-\lambda)\, f(x, y), \quad \lambda \in [0, 1].$$

ii) f è **concava** se per ogni $(x^0, y^0), (x, y) \in A$ si ha

$$f\left(\lambda(x^0, y^0) + (1-\lambda)\,(x, y)\right) \geq \lambda f(x^0, y^0) + (1-\lambda)\, f(x, y), \quad \lambda \in [0, 1].$$

Teorema 2.4 (Caratterizzazione del I ordine) *Sia $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ insieme aperto e convesso, f di classe C^1.*
i) f è convessa se e solo se vale la seguente condizione

$$f(x, y) \geq f(x^0, y^0) + \nabla f(x^0, y^0)^T \begin{pmatrix} x - x^0 \\ y - y^0 \end{pmatrix}, \quad \forall (x, y), \forall (x^0, y^0) \in A.$$

ii) f è concava se e solo se vale la seguente condizione

$$f(x, y) \leq f(x^0, y^0) + \nabla f(x^0, y^0)^T \begin{pmatrix} x - x^0 \\ y - y^0 \end{pmatrix}, \quad \forall (x, y), \forall (x^0, y^0) \in A.$$

Teorema 2.5 (Caratterizzazione del II ordine) *Sia $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ insieme aperto e convesso, f di classe C^2.*
i) f è convessa se e solo se valgono le seguenti condizioni

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}\,(x, y) \geq 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}\,(x, y) \geq 0, \ e \ \det H\,(x, y) \geq 0 \ \ \forall (x, y) \in A.$$

ii) f è concava se e solo se valgono le seguenti condizioni

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}\,(x, y) \leq 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}\,(x, y) \leq 0, \ e \ \det H\,(x, y) \geq 0 \ \ \forall (x, y) \in A.$$

Funzioni concave e convesse e condizioni di ottimalità

Teorema 2.6 *Sia $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$, A aperto e convesso, f di classe C^1.*
i) Se f è convessa e $(x^0, y^0) \in A$ è punto critico per f, allora (x^0, y^0) è punto di minimo assoluto per f su A.
ii) Se f è concava e $(x^0, y^0) \in A$ è punto critico per f, allora (x^0, y^0) è punto di massimo assoluto per f su A.

Dimostrazione. i) In virtù della caratterizzazione del I ordine delle funzioni convesse si ha :

$$f(x,y) \geq f(x^0,y^0) + \nabla f(x^0,y^0)^T \begin{pmatrix} x - x^0 \\ y - y^0 \end{pmatrix}, \quad \forall (x,y) \in A.$$

Essendo (x^0, y^0) un punto critico, ovvero $\nabla f(x^0, y^0)^T = (0, 0)$, risulta $f(x, y) \geq f(x^0, y^0)$, $\forall (x, y) \in A$, da cui la tesi.
ii) Analoga alla i). ♣

Teorema 2.7 *Sia $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$, A aperto, f di classe C^1. Sia X un sottoinsieme convesso di A.*
i) Se f è convessa su X e $(x^0, y^0) \in X$ è punto di minimo relativo per f su X, allora (x^0, y^0) è punto di minimo assoluto di f su X.
ii) Se f è concava su X e $(x^0, y^0) \in X$ è punto di massimo relativo per f su X, allora (x^0, y^0) è punto di massimo assoluto di f su X.

Dimostrazione. i) Se (x^0, y^0) è punto interno di X, allora per la condizione necessaria di ottimalità del I ordine $\nabla f(x^0, y^0) = 0$ e la tesi segue dalla i) del Teorema 2.6. Se (x^0, y^0) è punto di frontiera per X, supponiamo per assurdo che non sia di minimo assoluto ovvero che esista un punto (x^*, y^*) tale che $f(x^*, y^*) < f(x^0, y^0)$. Poiché X è convesso, i punti del segmento di estremi $(x^*, y^*), (x^0, y^0)$ appartengono ad X e quindi la direzione $d = \begin{pmatrix} x^* - x^0 \\ y^* - y^0 \end{pmatrix}$ è una direzione ammissibile uscente da (x^0, y^0). Inoltre, in virtù della caratterizzazione del I ordine delle funzioni convesse si ha:

$$f(x^*,y^*) \geq f(x^0,y^0) + \nabla f(x^0,y^0)^T \begin{pmatrix} x^* - x^0 \\ y^* - y^0 \end{pmatrix}$$

o equivalentemente

$$f(x^*,y^*) - f(x^0,y^0) \geq \nabla f(x^0,y^0)^T \begin{pmatrix} x^* - x^0 \\ y^* - y^0 \end{pmatrix}.$$

Essendo $f(x^*, y^*) < f(x^0, y^0)$ si ha $f(x^*, y^*) - f(x^0, y^0) < 0$ da cui $\nabla f(x^0, y^0)^T \binom{x^* - x^0}{y^* - y^0} = \nabla f(x^0, y^0)^T d < 0$. Di conseguenza, la direzione $d = \begin{pmatrix} x^* - x^0 \\ y^* - y^0 \end{pmatrix}$ è una direzione ammissibile di decrescita locale, in contraddizione con il fatto che (x^0, y^0) è punto di minimo locale.
ii) Analoga alla i). ♣

3 Matematica finanziaria

3.1 Rendite periodiche. Montante e valore attuale

Nota bene: in questa sezione riportiamo soltanto la derivazione delle formule relative al valore attuale ed al montante dei vari tipi di rendite. In quanto segue considereremo rendite periodiche, temporanee, di n rate costanti di importo R, in regime di capitalizzazione composta, convenzione esponenziale, tasso $i > 0$.
Per una trattazione esaustiva sull'argomento si rimanda ai testi consigliati ed al materiale messo a disposizione sul portale di e-learning.
Ricordiamo che il valore attuale di una rendita è dato dalla somma dei valori attuali delle singole rate, calcolati in un dato regime di capitalizzazione e riferiti all'istante in cui inizia la costituzione della rendita, mentre il montante di una rendita è dato dalla somma dei montanti delle singole rate. In generale, il valore di una rendita ad una data epoca k è dato dalla somma dei valori delle singole rate alla suddetta epoca k. Indichiamo con V, M e V_k rispettivamente il valore attuale, il montante ed il valore all'epoca k di una rendita di n rate, al tasso $i > 0$; valgono le seguenti relazioni fondamentali

$$M = V(1+i)^n \qquad V = \frac{M}{(1+i)^n} \tag{1}$$

$$V_k = V(1+i)^k \quad V_k = \frac{M}{(1+i)^{(n-k)}} \tag{2}$$

Rendita immediata e posticipata: valore attuale e montante

In una rendita immediata la prima rata si riferisce al primo periodo ovvero al periodo intercorrente tra (t_0, t_1); se la rendita è posticipata, ogni rata R viene pagata o riscossa alla fine del periodo di riferimento (Vedi figura 1). Sapendo che il montante di una rendita è la somma dei montanti delle singole rate si ha:

$$M = R + R(1+i) + R(1+i)^2 + ... + R(1+i)^{n-1}$$

ovvero

$$M = R\left[1 + (1+i) + (1+i)^2 + ... + (1+i)^{n-1}\right] \tag{3}$$

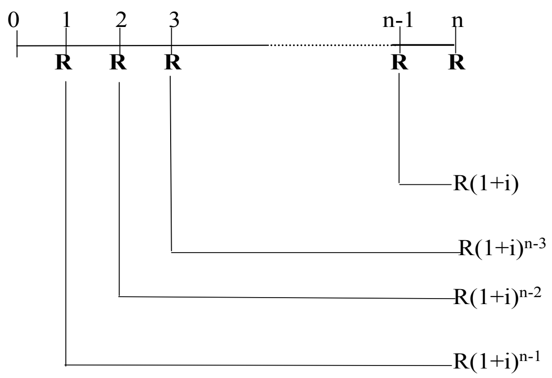

Figura 1: Asse temporale e montante di una rendita, immediata e posticipata

Moltiplicando ambo i membri dell'uguaglianza per (1+i) si ottiene:

$$M(1+i) = R\left[(1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + ... + (1+i)^n\right] \tag{4}$$

Facendo la differenza membro a membro tra la (4) e la (3) si ottiene

$$M(1+i) - M = R[(1+i)^n + (1+i)^{n-1} - (1+i)^{n-1} +, ..., (1+i) - (1+i) - 1]$$

da cui si ricava $iM = R[(1+i)^n - 1]$ e quindi

$$M = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Sapendo che il valore attuale è la somma dei valori attuali delle singole rate, si ha:

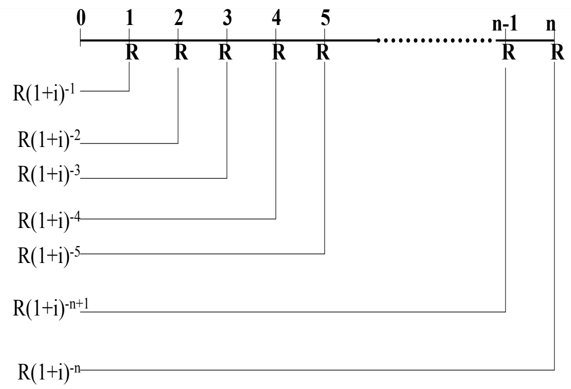

Figura 2: Asse temporale e valore attuale di una rendita, immediata e posticipata

$$\begin{aligned} V &= R(1+i)^{-1} + R(1+i)^{-2} + ... + R(1+i)^{-n} \\ &= R\left[(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + ... + (1+i)^{-n}\right] \end{aligned}$$

Con procedimento analogo a quello visto per il montante si ricava

$$\begin{aligned} V(1+i)-V &= R\left[1+\frac{1}{(1+i)}-\frac{1}{(1+i)}+,...,+\frac{1}{(1+i)^{(n-1)}}-\frac{1}{(1+i)^{(n-1)}}-\frac{1}{(1+i)^{n}}\right] \\ iV &= R[1-(1+i)^{-n}] \\ V &= R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \end{aligned}$$

Possiamo ricavare la formula del valore attuale, a partire da quella del montante, tenendo conto della relazione in (1), ovvero

$$V=\frac{M}{(1+i)^n}=R\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^n i}=R\frac{1-\frac{1}{(1+i)^n}}{i}$$

Rendita immediata anticipata: valore attuale e montante

In una rendita immediata, la prima rata si riferisce al primo periodo ovvero al periodo intercorrente tra (t_0, t_1); in una rendita anticipata ogni rata R viene pagata o riscossa all'inizio del periodo di riferimento (Vedi figura 3). Sapendo che il montante di una

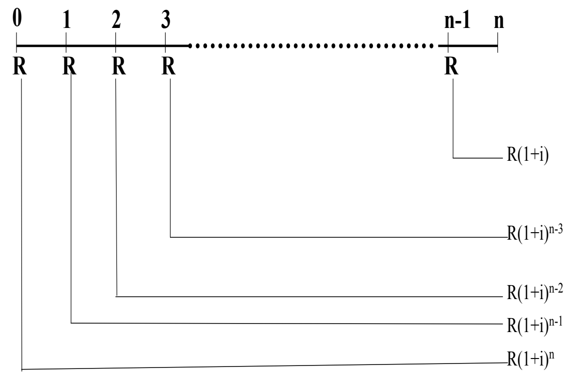

Figura 3: Asse temporale di una rendita periodica, immediata e anticipata

rendita è la somma dei montanti delle singole rate si ha:

$$M=R(1+i)+R(1+i)^2+...+R(1+i)^n$$

ovvero

$$M=R\left[(1+i)+(1+i)^2+...+(1+i)^n\right] \tag{5}$$

Così come visto nel caso di una rendita immediata posticipata, moltiplicando ambo i membri dell'uguaglianza per (1+i) si ottiene:

$$M(1+i)=R\left[(1+i)^2+(1+i)^3+...+(1+i)^{n+1}\right] \tag{6}$$

Facendo la differenza membro a membro tra la (6) e la (5) si ottiene

$$M(1+i) - M = R[(1+i)^{n+1} + (1+i)^n - (1+i)^n +, ..., (1+i)^2 - (1+i)^2 - (1+i)]$$

da cui si ricava $iM = R(1+i)^{n+1} - (1+i)$ e quindi

$$M = R(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Sapendo che il valore attuale è la somma dei valori attuali delle singole rate, si ha:

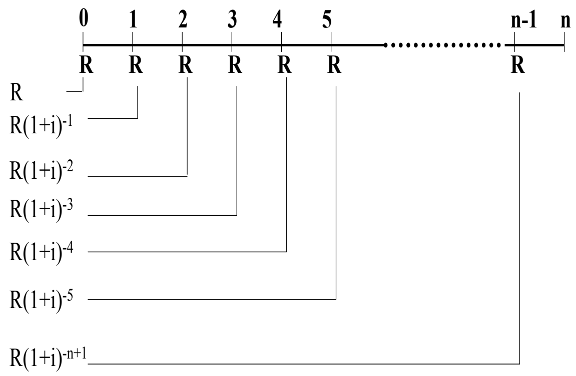

Figura 4: Asse temporale e valore attuale di una rendita, immediata e anticipata

$$\begin{aligned} V &= R(1 + R(1+i)^{-1} + ... + R(1+i)^{-n+1} \\ &= R\left[1 + (1+i)^{-1} + ... + (1+i)^{-n+1}\right] \end{aligned}$$

Con procedimento analogo a quello visto per il montante si ricava

$$\begin{aligned} V(1+i) - V &= R\left[(1+i) + 1 - 1+, ..., + \frac{1}{(1+i)^{(n-2)}} - \frac{1}{(1+i)^{(n-2)}} - \frac{1}{(1+i)^{n-1}}\right] \\ iV &= R(1+i)[1 - (1+i)^{-n}] \\ V &= R(1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \end{aligned}$$

Possiamo ricavare la formula del valore attuale, a partire da quella del montante, tenendo conto della relazione in (1), ovvero

$$V = \frac{M}{(1+i)^n} = R(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n i} = R(1+i)\frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i}$$

Relazione tra valori di una rendita immediata posticipata e immediata e anticipata

A parità di valore della rata R, numero delle rate n e tasso i, il valore attuale (montante) di una rendita immediata anticipata è uguale al valore attuale (montante) di rendita immediata posticipata moltiplicato per (1+i), ovvero

$$M_a = (1+i)M_p \quad V_a = V_p(1+i) \tag{7}$$

dove M_a,V_a indicano rispettivamente il montante ed il valore attuale di una rendita anticipata, mentre M_p,V_p indicano rispettivamente il montante ed il valore attuale di una rendita posticipata.

Rendite differite

Consideriamo una rendita posticipata, differita di p periodi, il cui asse temporale è rappresentato in figura 5.

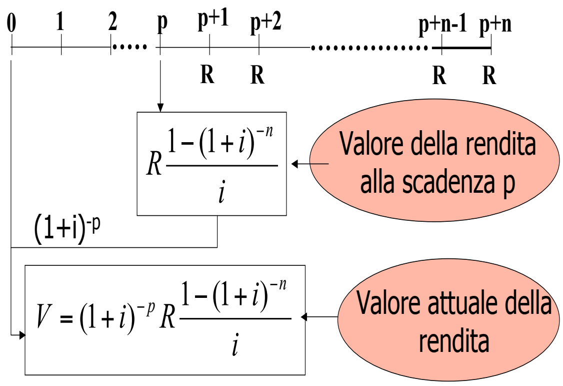

Figura 5: Asse temporale e valore attuale di una rendita differita, posticipata

Il valore attuale della rendita è dato da:

$$V = (1+i)^{-p}R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Nel caso di una rendita differita di p periodi, anticipata si ha la seguente struttura temporale.
Di conseguenza

$$V = (1+i)^{-p+1}R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Il montante di una rendita posticipata (anticipata) differita di p periodi è uguale al montante di una rendita immediata posticipata (anticipata) di uguale rata, durata e

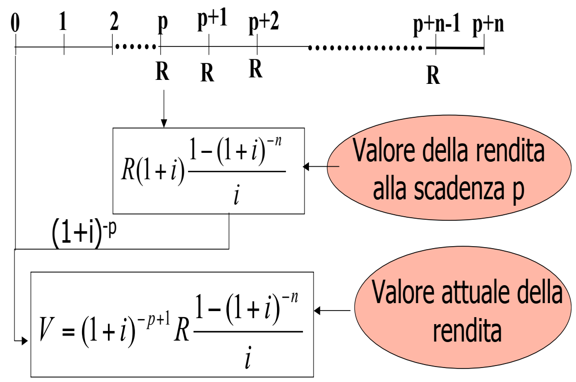

Figura 6: Asse temporale e valore attuale di una rendita differita, anticipata

tasso. Si osservi infine che una rendita posticipata differita di p periodi è uguale ad una rendita anticipata differita di $p+1$ periodi con lo stesso numero di rate, stesso importo R e stesso tasso i.

3.2 Ammortamenti di prestiti indivisi

Legame esistente tra le grandezze di un generico piano di ammortamento.

Indichiamo con A l'ammontare del debito, R_k la rata versata al periodo k, C_k la quota capitale al periodo k, I_k la quota interessi al periodo k.
D_k ed E_k rappresentano rispettivamente il debito residuo ed il debito rimborsato al periodo k.

$$\begin{aligned} R_k &= C_k + I_k, \qquad & I_k &= D_{k-1} * i, \\ E_k &= E_{k-1} + C_k, \qquad & D_k &= D_{k-1} - C_k \\ A &= E_k + D_k \end{aligned}$$

Ammortamento italiano

Il metodo di **ammortamento italiano** o uniforme, prevede che a fronte di un capitale A preso a prestito all'epoca iniziale, il debitore corrisponda n rate posticipate, di importo variabile R_k, tali che le quote capitali siano tutte uguali. Nell'ammortamento italiano quindi:

- $C_k = C = \frac{A}{n}$, $k = 1, ..., n$,
- il debito rimborsato all'epoca k è pari a $E_k = k\frac{A}{n}$,

- $D_k = \frac{(n-k)}{n} A$.
- La quota interessi $I_k = i D_{k-1} = \frac{(n-k+1)}{n} A$, da cui
  $I_{k+1} - I_k = \frac{(n-k)}{n} Ai - \frac{(n-k+1)}{n} Ai = -\frac{A}{n} i$.
  Le quote interessi variano in progressione aritmetica di ragione $-\frac{A}{n} i$.
- $R_k = C_k + I_k = \frac{A}{n} + \frac{A}{n} (n-k+1)\, i$.

Ammortamento francese

Il metodo di **ammortamento francese** o a rate costanti, prevede che a fronte di un capitale A preso a prestito all'epoca iniziale, il debitore corrisponda n rate posticipate, di importo costante R. L'importo delle rate è determinato in base al principio di equivalenza finanziaria $A = R a_{\bar{n}|i} = R \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$. In generale

- $D_k = R a_{\overline{n-k}|i} = R \frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{i}$
- $I_k = i D_{k-1} = R \frac{1-(1+i)^{-(n-k+1)}}{i} i = R(1 - (1+i)^{-(n-k+1)})$
- $C_k = R - I_k = R - R(1 - (1+i)^{-(n-k+1)}) = R\,(1+i)^{-(n-k+1)}$

analogamente si ha $I_{k+1} = i D_k = R \frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{i} i = R(1 - (1+i)^{-(n-k)})$ da cui $C_{k+1} = R - I_{k+1} = R - R(1 - (1+i)^{-(n-k)}) = R\,(1+i)^{-(n-k)}$; facendo il rapporto tra due quote capitale consecutive si ha:

$$\frac{C_{k+1}}{C_k} = \frac{R\,(1+i)^{-(n-k)}}{R\,(1+i)^{-(n-k+1)}} = \frac{(1+i)^{-(n-k)}}{(1+i)^{-(n-k+1)}} = (1+i),$$

da cui $C_{k+1} = C_k(1+i)$, ovvero le quote capitali corrisposte alle varie scadenze sono in progressione geometrica di ragione $(1+i)$. Per tale motivo, l'ammortamento francese è anche detto progressivo.