Lezione 21/2/24

- Introduzione al corso.
- Richiami di Microeconomia: La domanda, i costi, la massimizzazione dei profitti, la concorrenza perfetta.
- Richiami di Teoria dei giochi: Definizione di gioco, regole di un gioco, rappresentazione dei giochi, dominanza, equilibrio di Nash, giochi in strategie continue.

1

Concorrenza perfetta

- Atomicità,
- Omogeneità del prodotto,
- Informazione perfetta,
- Simmetria tecnologica,
- Libertà di entrata e di uscita.

- Price taker.

2

La concorrenza alla Bertrand

- La concorrenza alla Bertrand è un tipo di concorrenza in cui due o più imprese fissano simultaneamente i prezzi di vendita vincolandosi a fornire i consumatori disponibili a pagare quel prezzo con tutta la capacità a loro disposizione.
- Joseph Louis François Bertrand (1822–1900)

3

La concorrenza alla Bertrand

Assunzione 1: Numero di imprese. *$I = \{1,2\}$ è l'insieme finito delle imprese concorrenti all'interno del mercato considerato.*

Assunzione 2: Prodotti omogenei. *Ogni impresa $i \in I$ produce un unico bene; i beni prodotti dalle imprese in I sono tra loro omogenei.*

Assunzione 3: Domanda di mercato. *Le preferenze dei consumatori determinano la funzione di domanda $Q = D(p)$, dove Q è la quantità domandata dal mercato e p è il prezzo di domanda, dotata delle seguenti caratteristiche tecniche. Esiste $\overline{p} > 0$ tale che:*

$D(p)$ è definita e continua nell'intervallo $p \in \mathbb{R}_+$;

$D(p) = 0$ per $p \geq \overline{p}$;

$D(p) > 0, \ \forall p \in (0, \overline{p})$;

$D(p)$ è derivabile due volte in $(0, \overline{p})$ con derivate continue (in tale intervallo la funzione $D(p)$ è quindi di classe C^2), dove $D'(p) = \partial D(p)/\partial p < 0$ e $D''(p) = \partial^2 D(p)/\partial p^2 \leq 0$.

4

La concorrenza alla Bertrand

In alcuni casi sarà utile fare riferimento alla funzione inversa della funzione $Q = D(p)$ limitatamente al tratto in cui questa funzione è decrescente. Indicheremo questa funzione come $p = P(Q)$ e sarà definita solo per $Q \in [0, D(0)]$. Ovviamente $P(D(p)) = p$ con $P(0) = \overline{p}$.

Assunzione 3: Domanda di mercato. *Le preferenze dei consumatori determinano la funzione di domanda $Q = D(p)$, dove Q è la quantità domandata dal mercato e p è il prezzo di domanda, dotata delle seguenti caratteristiche tecniche. Esiste $\overline{p} > 0$ tale che:*

$D(p)$ è definita e continua nell'intervallo $p \in \mathbb{R}_+$;

$D(p) = 0$ per $p \geq \overline{p}$;

$D(p) > 0, \ \forall p \in (0, \overline{p})$;

$D(p)$ è derivabile due volte in $(0, \overline{p})$ con derivate continue (in tale intervallo la funzione $D(p)$ è quindi di classe C^2), dove $D'(p) = \partial D(p)/\partial p < 0$ e $D''(p) = \partial^2 D(p)/\partial p^2 \leq 0$.

5

La concorrenza alla Bertrand

Assunzione 4: Costi. *I costi di produzione che l'impresa $i \in I$ deve sostenere sono definiti dalla funzione $C(q_i,k_i)$, dove q_i è la quantità prodotta e venduta dalla generica impresa i, mentre k_i è la sua capacità produttiva:*

$$C(q_i, k_i) = \begin{cases} F + rk_i + cq_i & \text{se} \quad 0 \leq q_i \leq k_i \\ \\ \infty & \text{se} \quad q_i > k_i \end{cases}$$

Assunzione 5: Regola del razionamento efficiente. *Se $p_i < p_j$ e $D(p_i) > k_i$, allora la domanda $D(p_i) - k_i$ non è servita dall'impresa i e l'impresa j ottiene una domanda residua pari a $D_j = D(p_j) - k_i$.*

$$D_i(p_1, p_2, k_j) = \begin{cases} D(p_i) & \text{se } p_i < p_j \\ \max\left\{\dfrac{D(p_1)}{2}, D(p_1) - k_j\right\} & \text{se } p_1 = p_2 \\ \max\left\{0, D(p_i) - k_j\right\} & \text{se } p_i > p_j \end{cases}$$

6

La concorrenza alla Bertrand

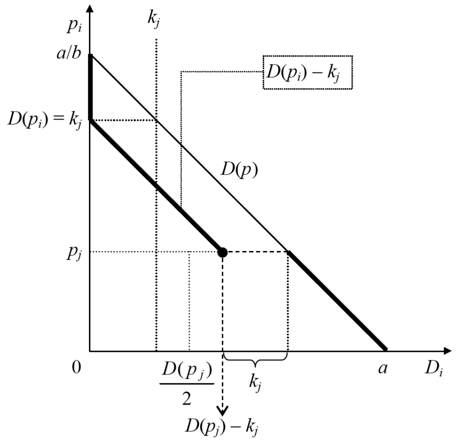
$$D_i(p_1, p_2, k_j) = \begin{cases} D(p_i) & \text{se } p_i < p_j \\ \max\left\{\dfrac{D(p_1)}{2}, D(p_1) - k_j\right\} & \text{se } p_1 = p_2 \\ \max\left\{0, D(p_i) - k_j\right\} & \text{se } p_i > p_j \end{cases}$$

$$D_j = \underbrace{\frac{D(p)}{2}}_{\substack{\text{domanda di} \\ \text{mercato per} \\ p_i = p_j = p}} + \underbrace{\frac{D(p)}{2}}_{\substack{\text{domanda residuale} \\ \text{quando } k_i < D(p)/2}} - k_i = D(p) - k_i$$

7

La concorrenza alla Bertrand

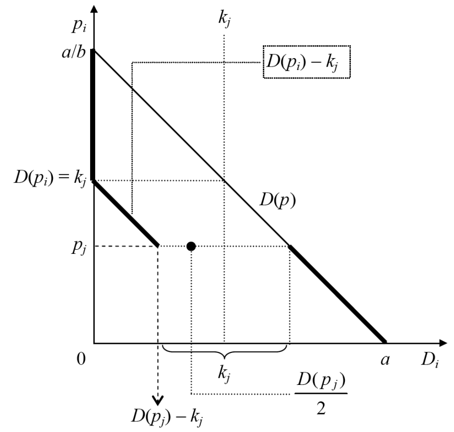
Figura 1.1. – *Domanda individuale dell'impresa i quando $k_j < D(p_j)/2$*



8

La concorrenza alla Bertrand

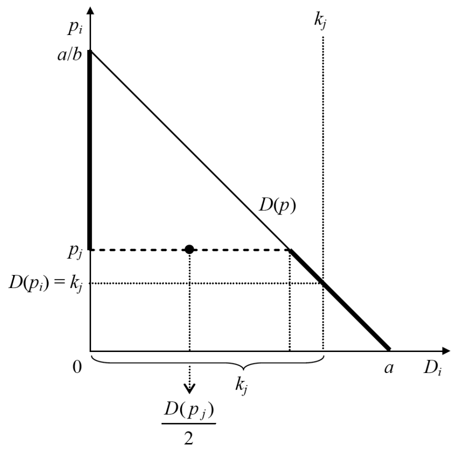
Figura 1.2. – *Domanda individuale dell'impresa i quando $D(p_j)/2 < k_j < D(p_j)$*



9

La concorrenza alla Bertrand

Figura 1.3. – *Domanda individuale dell'impresa i quando $k_j > D(p_j)$*



10

La concorrenza alla Bertrand

Assunzione 6: Dimensione delle imprese. *Ogni impresa i possiede una capacità produttiva k_i: $k_i \geq D(c)$.*

$$D_i(p_1, p_2, k_j) = \begin{cases} D(p_i) & \text{se } p_i < p_j \\ \max\left\{\dfrac{D(p_1)}{2}, D(p_1) - k_j\right\} & \text{se } p_1 = p_2 \\ \max\left\{0, D(p_i) - k_j\right\} & \text{se } p_i > p_j \end{cases}$$

$$D_i(p_1, p_2) = \begin{cases} D(p_i) & \text{se } p_i < p_j \\ \dfrac{D(p_1)}{2} & \text{se } p_1 = p_2 \\ 0 & \text{se } p_i > p_j \end{cases}$$

11

La concorrenza alla Bertrand

Assunzione 7: Struttura temporale. *Al tempo t_0 le imprese in I scelgono simultaneamente i prezzi di offerta.*

Assunzione 8: Strategie. *La variabile strategica impiegata dalla generica impresa $i \in I$ consiste nella scelta del prezzo di vendita del bene prodotto p_i:* $p_i \in [c, \bar{p}]$.

12

Regole di razionamento della domanda

Assunzione 5: Regola del razionamento efficiente. *Se $p_i < p_j$ e $D(p_i) > k_i$, allora la domanda $D(p_i) - k_i$ non è servita dall'impresa i e l'impresa j ottiene una domanda residua pari a $D_j = D(p_j) - k_i$.*

Con il razionamento efficiente ogni consumatore viene egualmente razionato per una parte della propria domanda individuale. Nel caso specifico, l'impresa *i* soddisfa le richieste di ogni singolo consumatore nei limiti della sua capacità produttiva k_i: ognuno degli *n* consumatori otterrà, al prezzo p_i, la quantità k_i/n. La domanda residua che l'impresa *j* ottiene da ciascun consumatore è quindi pari a:

$$d_j(p_j) = \max\left\{0, d(p_j) - \frac{k_i}{n}\right\}$$

e la domanda residua complessiva sarà:

$$D_j(p_j) = \max\{0, D(p_j) - k_i\}\ .$$

13

Regole di razionamento della domanda

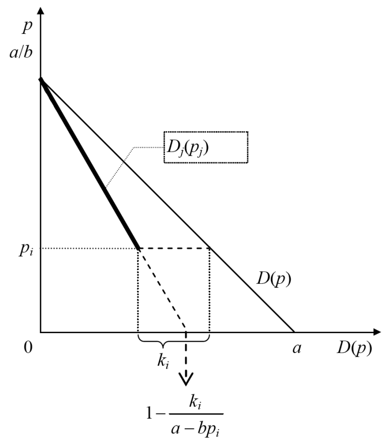
Con il razionamento proporzionale, si suppone che la quantità prodotta da entrambe le imprese venga venduta in base al principio "*primo arrivato, primo servito*". Di conseguenza, quella parte di consumatori che si rivolgerà troppo tardi all'impresa *i* non riuscirà ad acquistare la quantità richiesta a questa impresa, dovendosi invece rivolgere all'impresa che pratica il prezzo più elevato (impresa *j*). Nel caso specifico, l'impresa *i* soddisfa interamente le richieste dei consumatori fino ad esaurire la propria capacità produttiva k_i: solo una quota di consumatori $k_i/D(p_i)$ viene quindi servita da questa impresa. La quota di consumatori insoddisfatta, $1 - [k_i/D(p_i)]$, viene invece servita dall'impresa *j*, la cui domanda residua sarà, quindi, pari a:

$$D_j(p_j) = \max\left\{0, \left(1 - \frac{k_i}{D(p_i)}\right) D(p_j)\right\}.$$

14

Regole di razionamento della domanda

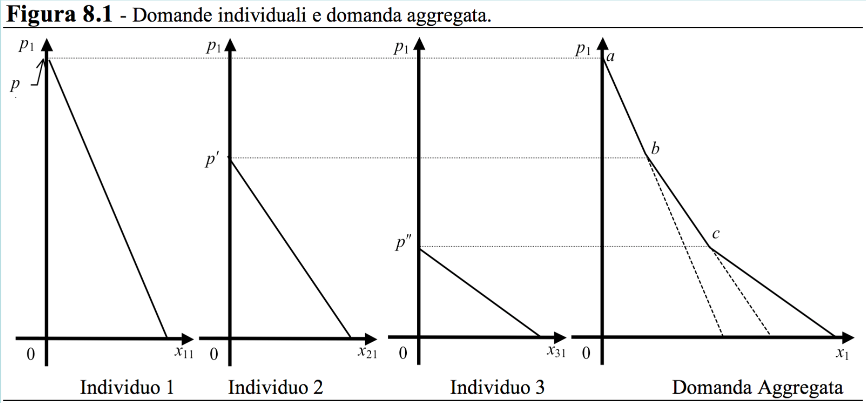
Figura 1.4. – *Domanda residua con la regola del razionamento proporzionale*



15

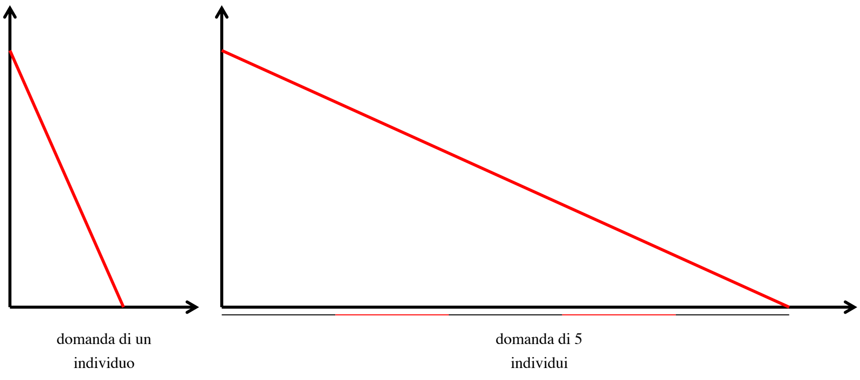
Domande individuali e domanda aggregata

Figura 8.1 - Domande individuali e domanda aggregata.



16

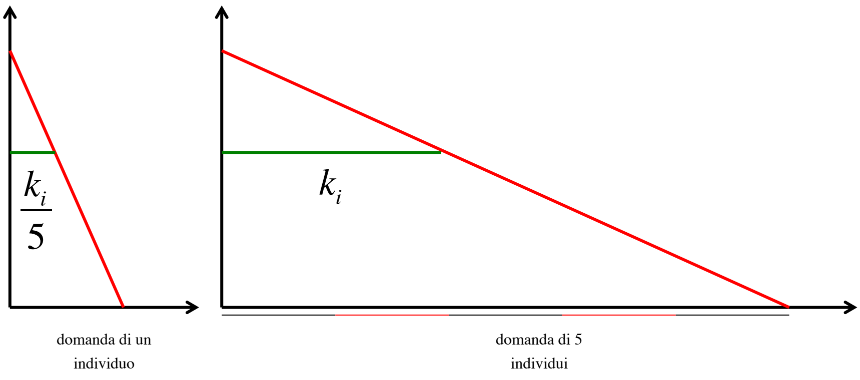
Domande individuali e domanda aggregata



17

Razionamento efficiente

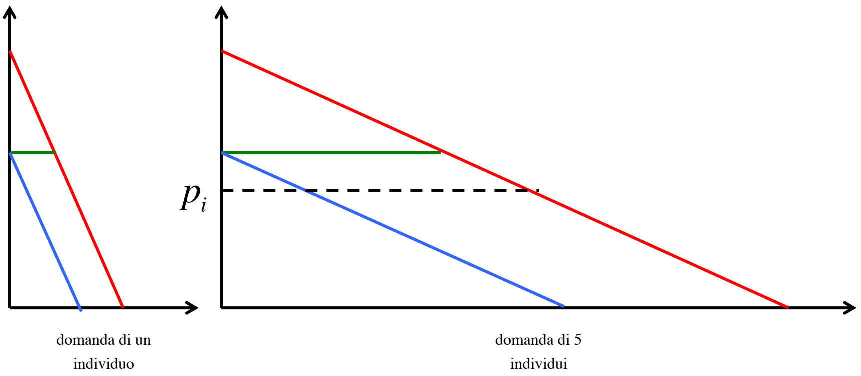
Con il razionamento efficiente ogni consumatore viene egualmente razionato per una parte della propria domanda individuale.



18

Razionamento efficiente

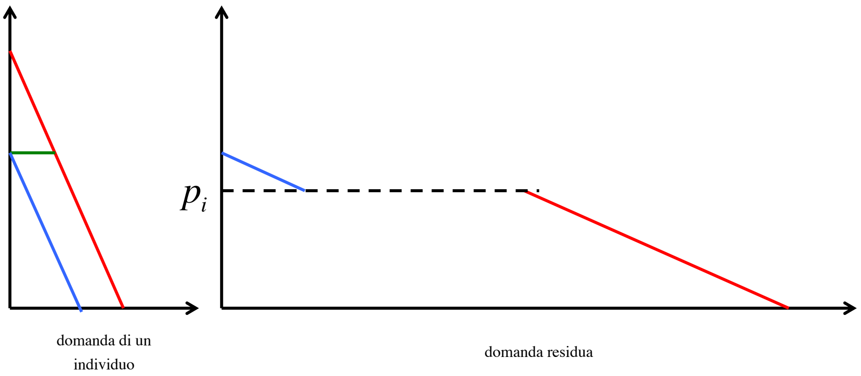
Con il razionamento efficiente ogni consumatore viene egualmente razionato per una parte della propria domanda individuale.



19

Razionamento efficiente

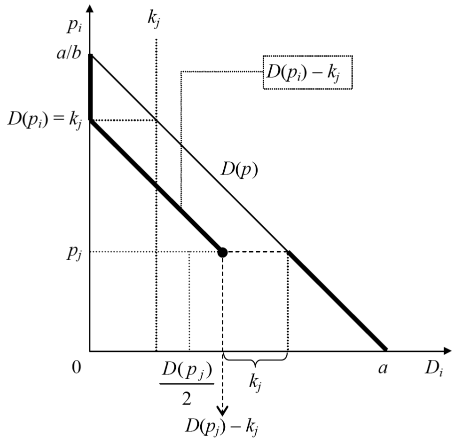
Con il razionamento efficiente ogni consumatore viene egualmente razionato per una parte della propria domanda individuale.



20

La concorrenza alla Bertrand

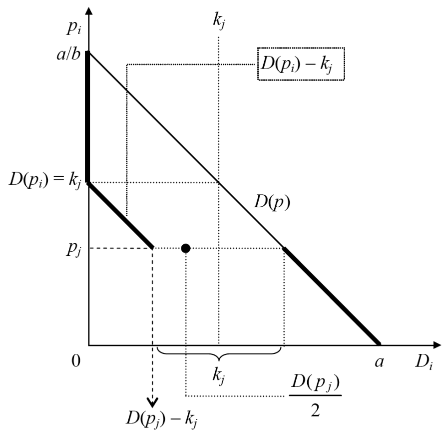
Figura 1.1. – *Domanda individuale dell'impresa i quando* $k_j < D(p_j)/2$



21

La concorrenza alla Bertrand

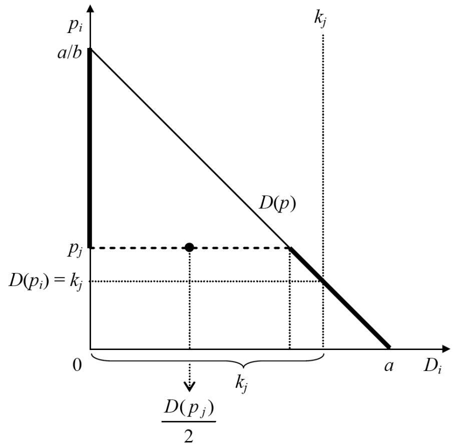
Figura 1.2. – *Domanda individuale dell'impresa i quando* $D(p_j)/2 < k_j < D(p_j)$



22

La concorrenza alla Bertrand

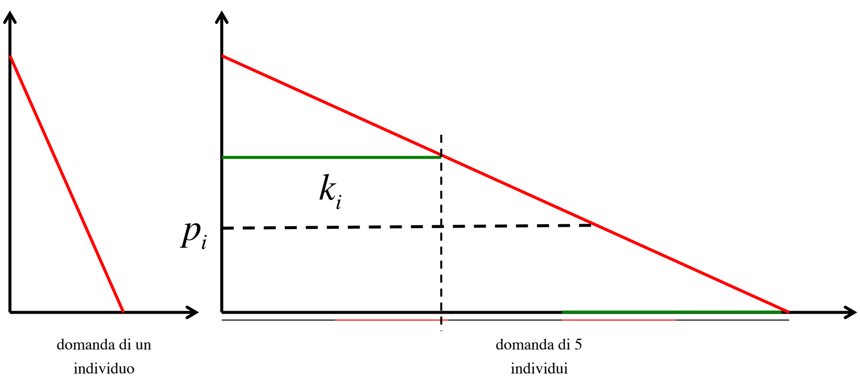
Figura 1.3. – *Domanda individuale dell'impresa i quando $k_j > D(p_j)$*



23

Razionamento proporzionale

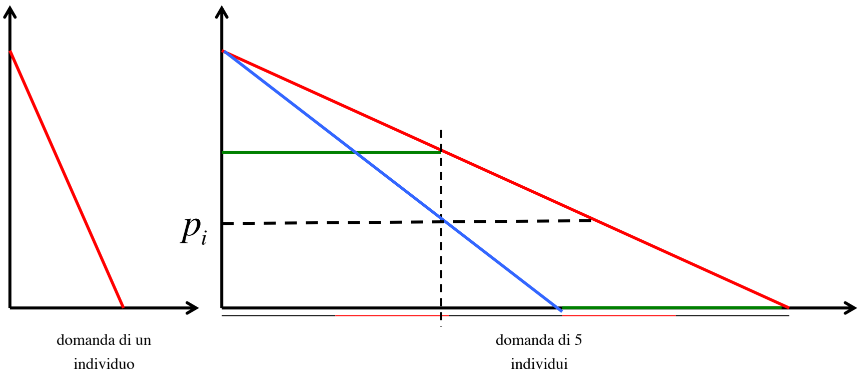
Con il razionamento proporzionale, si suppone che la quantità prodotta da entrambe le imprese venga venduta in base al principio "*primo arrivato, primo servito*".



24

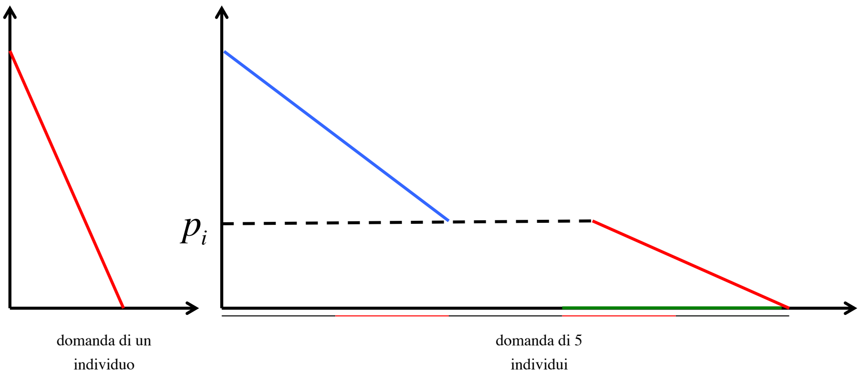
Razionamento proporzionale

Con il razionamento proporzionale, si suppone che la quantità prodotta da entrambe le imprese venga venduta in base al principio "*primo arrivato, primo servito*".



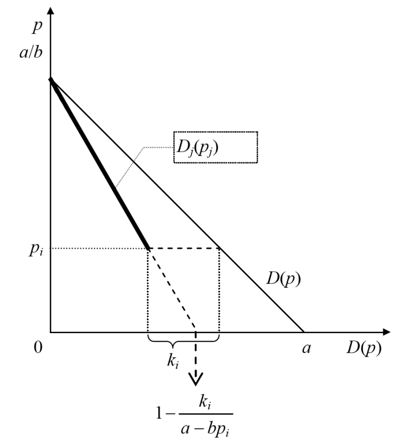
Razionamento proporzionale

Con il razionamento proporzionale, si suppone che la quantità prodotta da entrambe le imprese venga venduta in base al principio "*primo arrivato, primo servito*".



Regole di razionamento della domanda

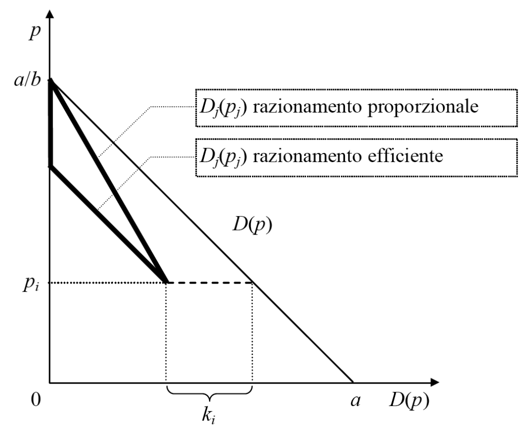
Figura 1.4. – *Domanda residua con la regola del razionamento proporzionale*



27

Regole di razionamento della domanda

Figura 1.5. – *Domande residue a confronto*



28

Il modello di Bertrand

Assunzione 1: Numero di imprese. *$I = \{1,2\}$ è l'insieme finito delle imprese concorrenti all'interno del mercato considerato.*

Assunzione 2: Prodotti omogenei. *Ogni impresa $i \in I$ produce un unico bene; i beni prodotti dalle imprese in I sono tra loro omogenei.*

Assunzione 3: Domanda di mercato. *Le preferenze dei consumatori determinano la funzione di domanda $Q = D(p)$, dove Q è la quantità domandata dal mercato e p è il prezzo di domanda, dotata delle seguenti caratteristiche tecniche. Esiste $\overline{p} > 0$ tale che:*

$D(p)$ è definita e continua nell'intervallo $p \in \mathbb{R}_+$;

$D(p) = 0$ per $p \geq \overline{p}$;

$D(p) > 0,\ \forall p \in (0, \overline{p})$;

$D(p)$ è derivabile due volte in $(0, \overline{p})$ con derivate continue (in tale intervallo la funzione $D(p)$ è quindi di classe C^2), dove $D'(p) = \partial D(p)/\partial p < 0$ e $D''(p) = \partial^2 D(p)/\partial p^2 \leq 0$.

29

Il modello di Bertrand

Assunzione 4: Costi. *I costi di produzione che l'impresa $i \in I$ deve sostenere sono definiti dalla funzione $C(q_i,k_i)$, dove q_i è la quantità prodotta e venduta dalla generica impresa i, mentre k_i è la sua capacità produttiva:*

$$C(q_i, k_i) = \begin{cases} F + rk_i + cq_i & \text{se} \quad 0 \leq q_i \leq k_i \\ \\ \infty & \text{se} \quad q_i > k_i \end{cases}$$

Assunzione 6: Dimensione delle imprese. *Ogni impresa i possiede una capacità produttiva k_i: $k_i \geq D(c)$.*

Assunzione 7: Struttura temporale. *Al tempo t_0 le imprese in I scelgono simultaneamente i prezzi di offerta.*

Assunzione 8: Strategie. *La variabile strategica impiegata dalla generica impresa $i \in I$ consiste nella scelta del prezzo di vendita del bene prodotto p_i: $p_i \in [c, \overline{p}]$.*

30

Il modello di Bertrand

L'Assunzione 1 definisce l'*insieme finito dei giocatori*. Le Assunzioni 7 e 8 definiscono lo spazio strategico di ciascuna impresa *i*, $\mathbb{P}_i = [c, \overline{p}]$. La combinazione dei prezzi adottata è il vettore non negativo $(p_1, p_2) \in \mathbb{P}$, dove $\mathbb{P}$ è il prodotto cartesiano degli spazi strategici di ogni impresa: $\mathbb{P} = \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2 = [c, \overline{p}] \times [c, \overline{p}]$.

31

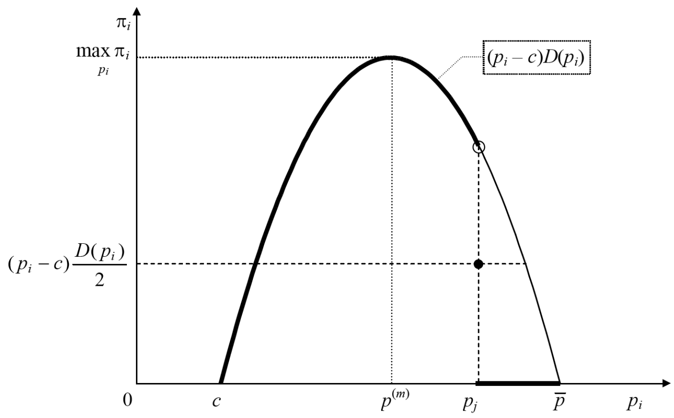
Il modello di Bertrand

$$\Pi_i(p_1, p_2, k_i) = \begin{cases} \left(p_i - c\right) D(p_i) - F - rk_i & \text{se} \quad p_i < p_j \\ \left(p_1 - c\right) \dfrac{D(p_1)}{2} - F - rk_i & \text{se} \quad p_1 = p_2 \\ -F - rk_i & \text{se} \quad p_i > p_j \end{cases}$$

32

Il modello di Bertrand

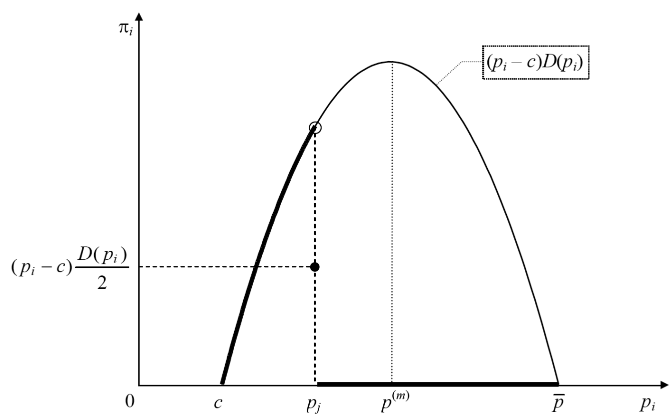
Figura 2.2. – *La funzione del profitto variabile dell'impresa i quando* $p^{(m)} < p_j \leq \overline{p}$.



33

Il modello di Bertrand

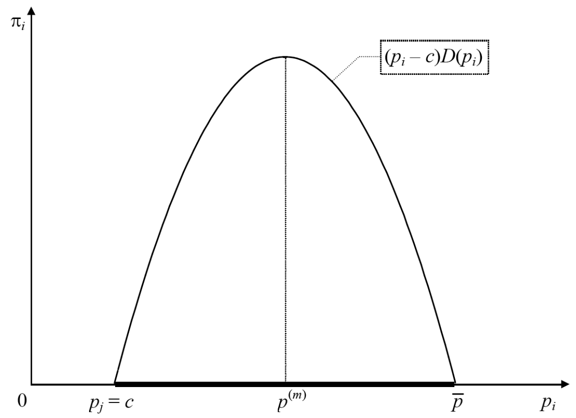
Figura 2.3. – *La funzione del profitto variabile dell'impresa i quando* $c < p_j < p^{(m)}$.



34

Il modello di Bertrand

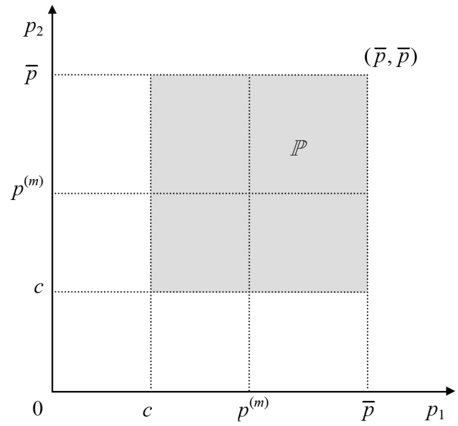
Figura 2.4. – *La funzione del profitto variabile dell'impresa i quando* $p_j = c$.



35

Il modello di Bertrand

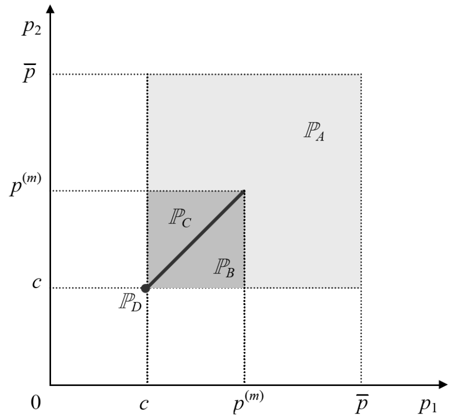
Figura 2.1. – *Insieme strategico* $\mathbb{P}$.



36

Il modello di Bertrand

Figura 2.5. – *Partizione dell'insieme strategico*



37

Estremo superiore

In matematica, un **maggiorante** di un insieme è un qualsiasi elemento che è maggiore o uguale a tutti gli elementi dell'insieme. Per poter parlare di maggiore o uguale abbiamo bisogno di una relazione d'ordine, quindi l'insieme deve essere ordinato.

Sia $(X,\leq)$ un insieme ordinato e $E \subseteq X$, $E \neq \varnothing$; si dice che un elemento $y \in X$ è un **maggiorante** di E se per ogni $x \in E$ si ha $x \leq y$.

Esempi

- $X = \mathbb{N}, E = \{1,2,3\}$, allora i suoi maggioranti sono $\{3,4,5,...\}$, notare che anche 3 è maggiorante.
- $X = \mathbb{R}, E = \{1,2,3\}$, i suoi maggioranti sono $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 3\}$.

38

Estremo superiore

In matematica, l'**estremo superiore** di un insieme E contenuto in un insieme ordinato X è il più piccolo elemento dei maggioranti di E.

L'estremo superiore può appartenere ad E oppure no. Nel primo caso coincide con il suo massimo.

Sia $(X,\leq)$ un insieme totalmente ordinato e sia $E \subseteq X$.

Se esiste un elemento $y \in X$ tale che:

- y è un maggiorante di E
- non esiste $z \in X$ tale che z è un maggiorante di E e $z < y$ (vale a dire il maggiorante più piccolo è y stesso)

si dice che y è *estremo superiore* di E, in simboli $y = \sup E$.

39

Estremo superiore

Sia $X = \mathbb{R}$, si determini l'estremo superiore ed il massimo dei seguenti insiemi, quando esistono:

- $E = \{1,2,3\}$
- $\{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$
- $\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$
- $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 4\}$
- $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$

Sia $X = \mathbb{Q}$, si determini l'estremo superiore ed il massimo dei seguenti insiemi, quando esistono:

- $E = \{1,2,3\}$
- $\{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$
- $\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$
- $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 4\}$
- $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$

40

Estremo superiore

Spesso si incontrano notazioni del tipo:

$$y = \sup_{x \in A} f(x)$$

dove f è una funzione a valori reali su un dominio qualsiasi e A è un sottoinsieme del suo dominio.

Questa notazione è un modo compatto per esprimere:

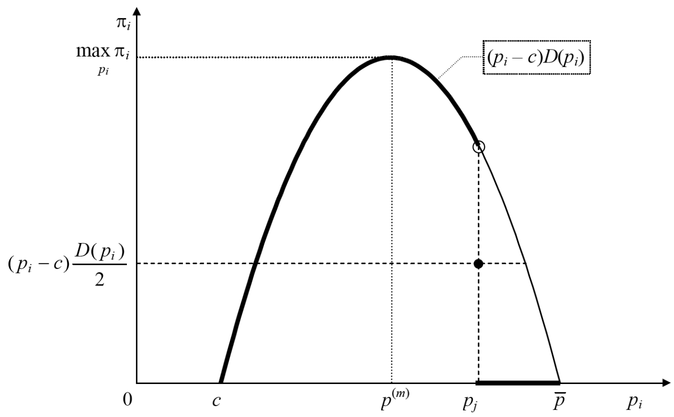
$$y = \sup\{z = f(x), x \in A\}$$

indica cioè l'estremo superiore dell'immagine di A mediante f.

41

Il modello di Bertrand

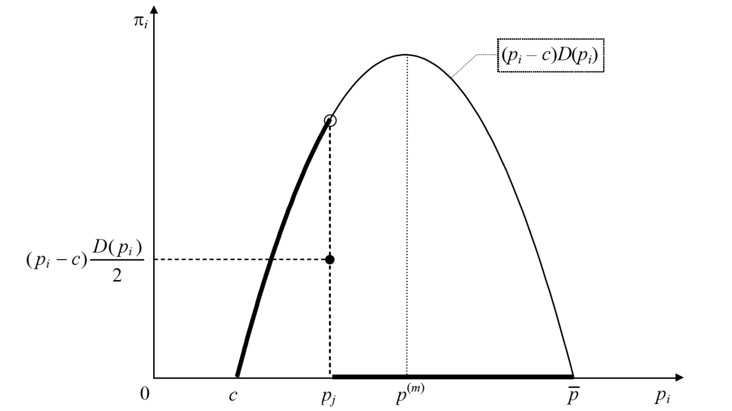
Figura 2.2. – *La funzione del profitto variabile dell'impresa i quando* $p^{(m)} < p_j \leq \overline{p}$.



42

Il modello di Bertrand

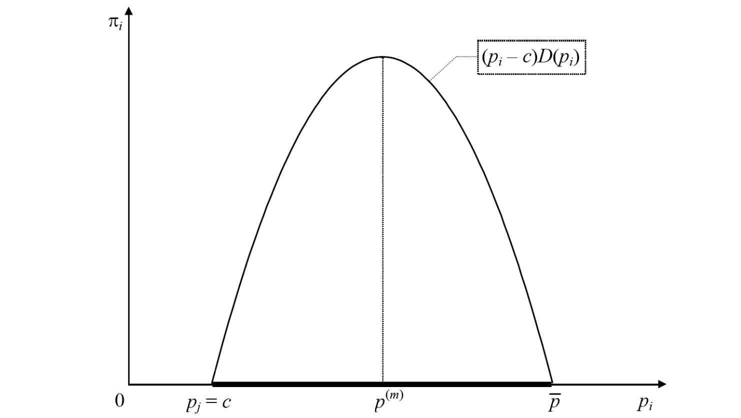
Figura 2.3. – *La funzione del profitto variabile dell'impresa i quando $c < p_j < p^{(m)}$.*



43

Il modello di Bertrand

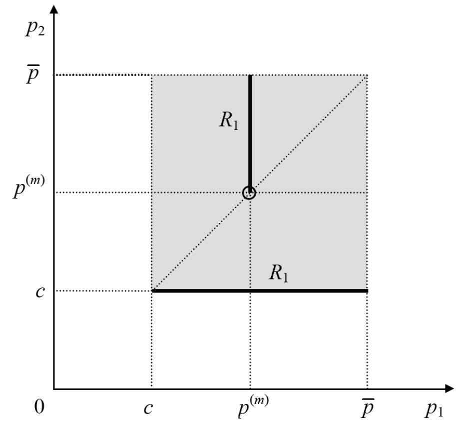
Figura 2.4. – *La funzione del profitto variabile dell'impresa i quando $p_j = c$.*



44

Il modello di Bertrand

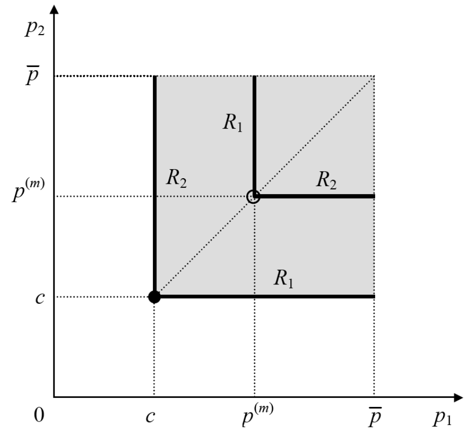
Figura 2.6. – *La curva di reazione dell'impresa i*



45

Il modello di Bertrand

Figura 2.7. – *Curve di reazione ed equilibrio di Bertrand*



46

Paradosso di Bertrand

- Le imprese non sono in grado di coprire i costi fissi.

- Alternativa 1: Vincoli di capacità (modello di Edgeworth; gioco capacità-prezzo).
- Alternativa 2: Differenziazione del prodotto (modello di Hotelling).
- Alternativa 3: Collusione tra imprese.

47