Lezione 23/2/24

- Richiami di Microeconomia: la concorrenza perfetta.
- Competizione alla Bertrand (Salvadori-D'Alessandro-Fanelli, Capitolo 1).
- Il modello di Bertrand: il gioco e l'equilibrio; funzioni di reazione, il paradosso di Bertrand (Salvadori-D'Alessandro-Fanelli, Capitolo 2).

1

Paradosso di Bertrand

- Le imprese non sono in grado di coprire i costi fissi.

- Alternativa 1: Vincoli di capacità (modello di Edgeworth; gioco capacità-prezzo).
- Alternativa 2: Differenziazione del prodotto (modello di Hotelling).
- Alternativa 3: Collusione tra imprese.

2

Il modello di Edgeworth

Assunzione 1: Numero di imprese. *$I = \{1,2\}$ è l'insieme finito delle imprese concorrenti all'interno del mercato considerato.*

Assunzione 2: Prodotti omogenei. *Ogni impresa $i \in I$ produce un unico bene; i beni prodotti dalle imprese in I sono tra loro omogenei.*

Assunzione 3: Domanda di mercato. *Le preferenze dei consumatori determinano la funzione di domanda $Q = D(p)$, dove Q è la quantità domandata dal mercato e p è il prezzo di domanda, dotata delle seguenti caratteristiche tecniche. Esiste $\overline{p} > 0$ tale che:*

$D(p)$ è definita e continua nell'intervallo $p \in \mathbb{R}_+$;

$D(p) = 0$ per $p \geq \overline{p}$;

$D(p) > 0, \ \forall p \in (0, \overline{p})$;

$D(p)$ è derivabile due volte in $(0, \overline{p})$ con derivate continue (in tale intervallo la funzione $D(p)$ è quindi di classe C^2), dove $D'(p) = \partial D(p)/\partial p < 0$ e $D''(p) = \partial^2 D(p)/\partial p^2 \leq 0$.

3

Il modello di Edgeworth

Assunzione 4: Costi. *I costi di produzione che l'impresa $i \in I$ deve sostenere sono definiti dalla funzione $C(q_i, k_i)$, dove q_i è la quantità prodotta e venduta dalla generica impresa i, mentre k_i è la sua capacità produttiva:*

$$C(q_i, k_i) = \begin{cases} F + rk_i + cq_i & \text{se} \quad 0 \leq q_i \leq k_i \\ \\ \infty & \text{se} \quad q_i > k_i \end{cases}$$

Assunzione 5: Regola del razionamento efficiente. *Se $p_i < p_j$ e $D(p_i) > k_i$, allora la domanda $D(p_i) - k_i$ non è servita dall'impresa i e l'impresa j ottiene una domanda residua pari a $D_j = D(p_j) - k_i$.*

Assunzione 7: Struttura temporale. *Al tempo t_0 le imprese in I scelgono simultaneamente i prezzi di offerta.*

Assunzione 8: Strategie. *La variabile strategica impiegata dalla generica impresa $i \in I$ consiste nella scelta del prezzo di vendita del bene prodotto p_i: $p_i \in [c, \overline{p}]$.*

4

Il modello di Edgeworth

L'Assunzione 1 definisce l'*insieme finito dei giocatori*. Le Assunzioni 7 e 8 definiscono lo spazio strategico di ciascuna impresa *i*, $\mathbb{P}_i = [c, \overline{p}]$. La combinazione dei prezzi adottata è il vettore nonnegativo $(p_1, p_2) \in \mathbb{P}$, dove $\mathbb{P}$ è il prodotto cartesiano degli spazi strategici di ogni impresa: $\mathbb{P} = \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2 = [c, \overline{p}] \times [c, \overline{p}]$.

$$q_i = \min\left\{D_i(p_i, p_j, k_j), k_i\right\}$$

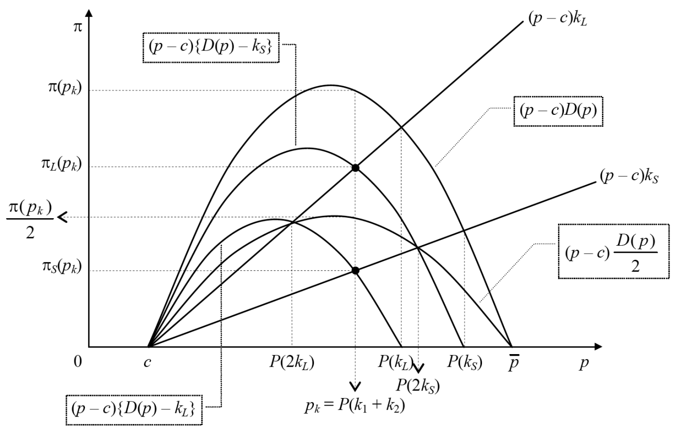
Le Assunzioni 2, 3, 4, e 5 consentono di definire la funzione del profitto della generica impresa *i* (o *funzione degli esiti* del generico giocatore *i*), Π_i, dato dalla differenza tra i ricavi totali $p_i q_i$ e i costi totali $C(q_i, k_i)$:

$$\Pi_i(p_1, p_2, k_1, k_2) = \begin{cases} (p_i - c)\min\{D(p_i), k_i\} - F - rk_i & \text{se } p_i < p_j \\ (p_1 - c)\min\left\{\max\left\{\dfrac{D(p_1)}{2}, D(p_1) - k_j\right\}, k_i\right\} - F - rk_i & \text{se } p_1 = p_2 \\ (p_i - c)\min\{\max\{0, D(p_i) - k_j\}, k_i\} - F - rk_i & \text{se } p_i > p_j \end{cases}$$

5

Il modello di Edgeworth

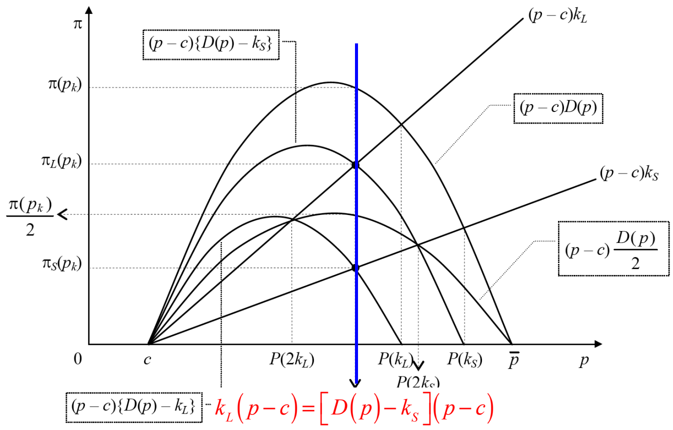
Figura 3.1. – *Schema delle funzioni del profitto*



6

Il modello di Edgeworth

Figura 3.1. – *Schema delle funzioni del profitto*

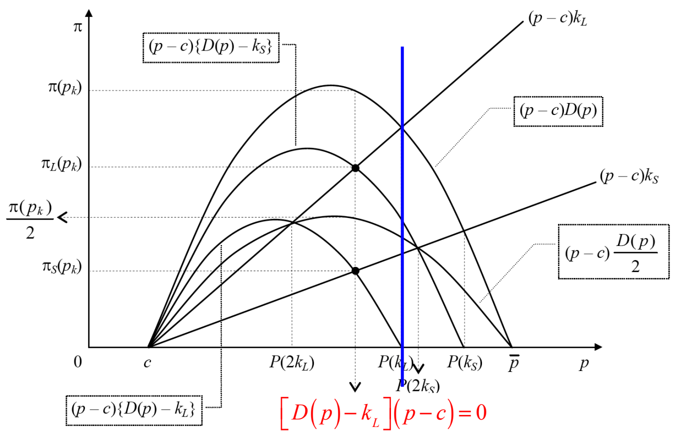


$$k_L(p-c)=[D(p)-k_S](p-c)$$
$$k_S(p-c)=[D(p)-k_L](p-c)$$

7

Il modello di Edgeworth

Figura 3.1. – *Schema delle funzioni del profitto*

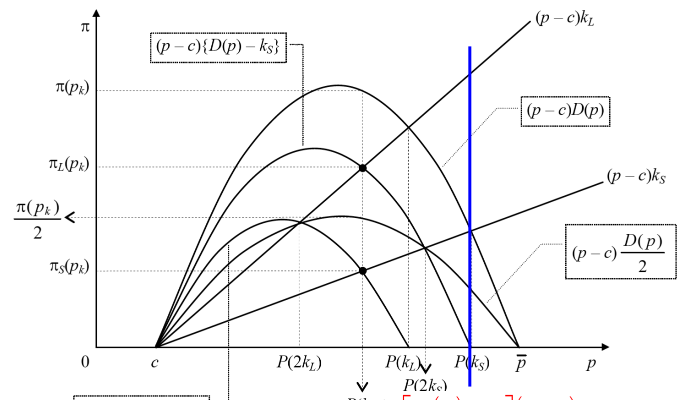


$$[D(p)-k_L](p-c)=0$$
$$k_L(p-c)=D(p)(p-c)$$

8

Il modello di Edgeworth

Figura 3.1. – *Schema delle funzioni del profitto*



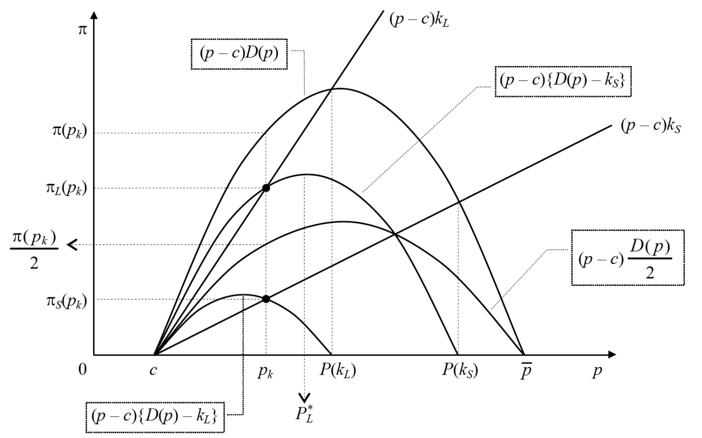
$$\left[D(p)-k_S\right](p-c)=0$$

$$k_S(p-c)=D(p)(p-c)$$

9

Il modello di Edgeworth

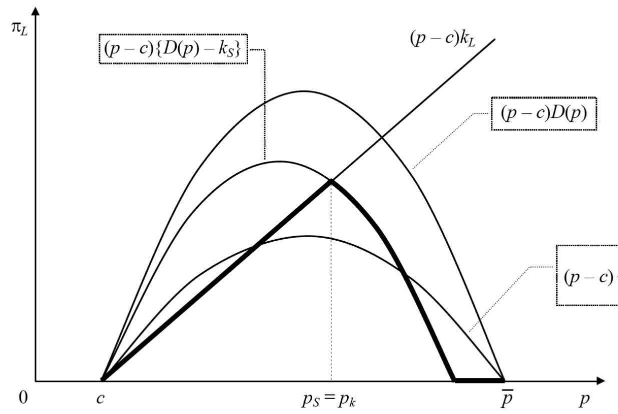
Figura 3.2. – *Schema delle funzioni del profitto, altro caso*



10

Il modello di Edgeworth

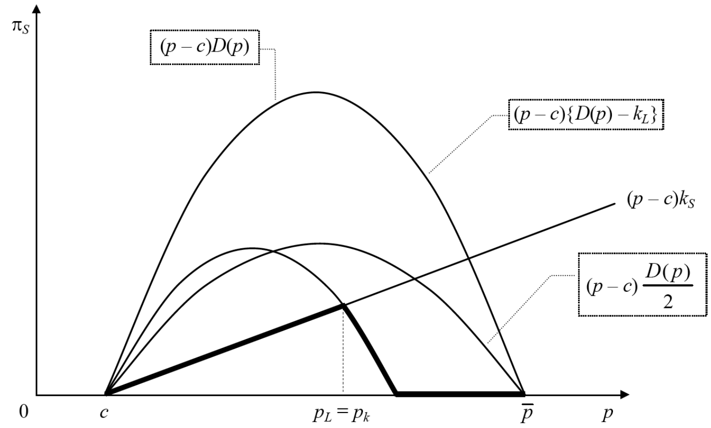
Figura 3.3. – *La funzione del profitto dell'impresa L, quando $p_S \leq p_k$*



11

Il modello di Edgeworth

Figura 3.4. – *La funzione del profitto dell'impresa S, quando $p_L \leq p_k$*



12

Il modello di Edgeworth

$$p_k \ : \ k_1 + k_2 = D(p_k)$$

$$\frac{\partial}{\partial p_1}\left[D\left(p_1\right) - k_2\right](p_1 - c) \le 0 \qquad \text{per } p_1 = p_k$$

$$\frac{\partial}{\partial p_2}\left[D\left(p_2\right) - k_1\right](p_2 - c) \le 0 \qquad \text{per } p_2 = p_k$$

13

Il modello di Edgeworth

$$p_k \ : \ k_1 + k_2 = D(p_k)$$

$$\frac{\partial}{\partial p_1}\left[D\left(p_1\right) - k_2\right](p_1 - c) \le 0 \qquad \text{per } p_1 = p_k$$

$$\frac{\partial}{\partial p_2}\left[D\left(p_2\right) - k_1\right](p_2 - c) \le 0 \qquad \text{per } p_2 = p_k$$

$$D'\left(p_1\right)(p_1 - c) + D\left(p_1\right) - k_2 \le 0 \qquad \text{per } p_1 = p_k$$

$$D'\left(p_2\right)(p_2 - c) + D\left(p_2\right) - k_1 \le 0 \qquad \text{per } p_2 = p_k$$

14

Il modello di Edgeworth

$$p_k \;:\; k_1 + k_2 = D(p_k)$$

$$D'(p_1)(p_1 - c) + D(p_1) - k_2 \le 0 \qquad \text{per } p_1 = p_k$$

$$D'(p_2)(p_2 - c) + D(p_2) - k_1 \le 0 \qquad \text{per } p_2 = p_k$$

$$D'(p_1)(p_1 - c) + k_1 \le 0 \qquad \text{per } p_1 = p_k$$

$$D'(p_2)(p_2 - c) + k_2 \le 0 \qquad \text{per } p_2 = p_k$$

15

Il modello di Edgeworth

$$p_k \;:\; k_1 + k_2 = D(p_k)$$

$$D'(p_1)(p_1 - c) + k_1 \le 0 \qquad \text{per } p_1 = p_k$$

$$D'(p_2)(p_2 - c) + k_2 \le 0 \qquad \text{per } p_2 = p_k$$

$$D'(p_k)(p_k - c) + k_1 \le 0$$

$$D'(p_k)(p_k - c) + k_2 \le 0$$

16

Il modello di Edgeworth

$$p_k \ : \ k_1 + k_2 = D(p_k)$$
$$P(k) : D(P(k)) = k \quad \text{per ogni } k$$
$$D'\left(p_k\right)(p_k - c) + k_1 \leq 0$$
$$D'\left(p_k\right)(p_k - c) + k_2 \leq 0$$
$$P(k_1 + k_2) - c + P'(k_1 + k_2)k_1 \geq 0$$
$$P(k_1 + k_2) - c + P'(k_1 + k_2)k_2 \geq 0$$

17

Funzione inversa

In matematica, una funzione $f : X \to Y$ si dice **invertibile** se esiste una funzione $g : Y \to X$ tale che

$g(f(x)) = x$ per ogni $x \in X$, e
$f(g(y)) = y$ per ogni $y \in Y$;

più formalmente,

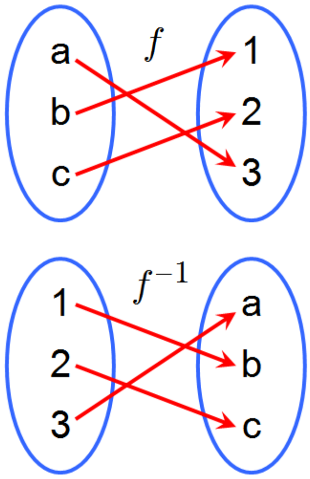
$g \circ f = \mathrm{id}_X$, e
$f \circ g = \mathrm{id}_Y$,

dove $f \circ g$ indica la funzione composta e id_S indica la funzione identità su S.

Se f è invertibile, allora la funzione g della definizione è unica; quest'unica funzione g è detta **funzione inversa** di f e viene indicata con f^{-1} (coerentemente con la notazione per l'elemento inverso rispetto alla composizione).

18

Funzione inversa



19

Derivata della funzione inversa

La derivata della funzione inversa è il reciproco della derivata della funzione calcolata nella controimmagine del punto:

$$D[f^{-1}(y)] = \frac{1}{f'(x)}$$

$D[f(x)]$ e $f'(x)$ sono notazioni che indicano il medesimo significato di derivata.

È sufficiente, per l'esistenza della funzione inversa, che la funzione sia strettamente monotona e continua nel suo dominio (questo automaticamente assicura che il denominatore sia non nullo e quindi che l'espressione sia ben definita).

Dimostrazione

Poniamo $y = f(x)$, $y_0 = f(x_0)$ per semplicità. Allora:

$$D[f^{-1}(y_0)] = \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

20

Il modello di Edgeworth

$$P(k_1 + k_2) - c + P'(k_1 + k_2)k_1 \geq 0$$

$$P(k_1 + k_2) - c + P'(k_1 + k_2)k_2 \geq 0$$

$$\frac{\partial}{\partial k_1}\left[P(k_1 + k_2)k_1 - ck_1\right] \geq 0$$

$$\frac{\partial}{\partial k_2}\left[P(k_1 + k_2)k_2 - ck_2\right] \geq 0$$

21

Il modello di Edgeworth

<u>Proposizione 3.1</u>. *Entrambe le funzioni $(p - c)[D(p) - k_i]$ $(i = 1, 2)$ sono decrescenti per $p = p_k$ se e solo se le capacità delle due imprese appartengono all'insieme*

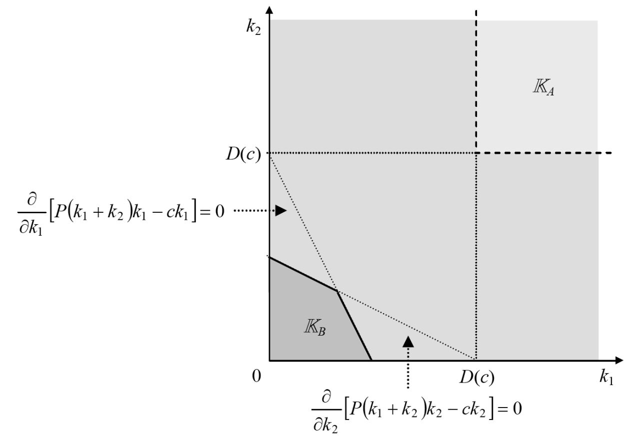
$$\mathbb{K}_B = \left\{ (k_1, k_2) \middle| \frac{\partial}{\partial k_1}[P(k_1 + k_2)k_1 - ck_1] \geq 0 \wedge \frac{\partial}{\partial k_2}[P(k_1 + k_2)k_2 - ck_2] \geq 0 \right\}.$$

<u>Proposizione 3.2</u>. *Se $(k_1, k_2) \in \mathbb{K}_B$, allora la coppia dei prezzi (p_k, p_k) costituisce un equilibrio di Nash in strategie pure in cui $p_1 = p_2 = P(k_1 + k_2)$.*

22

Il modello di Edgeworth

Figura 3.5. – *Gli insiemi* $\mathbb{K}_A$ *e* $\mathbb{K}_B$



23

Curve di reazione

$\mathbb{K}_{\mathrm{B}}$

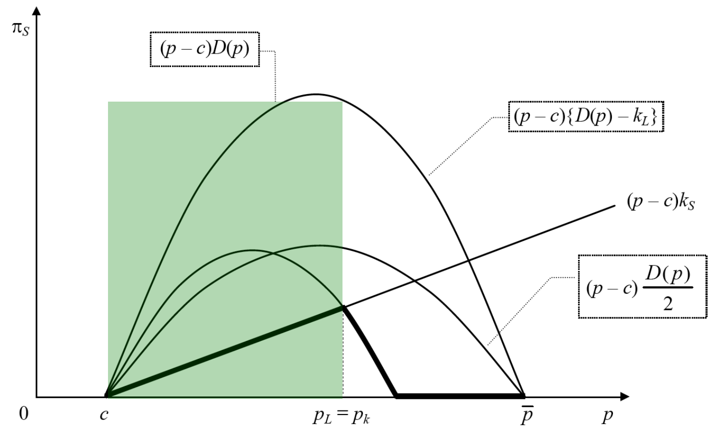
Allo scopo di determinare la funzione di reazione dell'impresa con la capacità inferiore (impresa *S*) consideriamo i seguenti quattro intervalli dove può trovarsi il prezzo della rivale (vedi Figure 3.4, 3.6-3.8):

(i) $c \le p_L \le P(k_1 + k_2)$;
(ii) $P(k_1 + k_2) < p_L \le P(2k_S)$;
(iii) $P(2k_S) < p_L \le P(k_S)$;
(iv) $P(k_S) < p_L \le \overline{p}$.

24

Curve di reazione

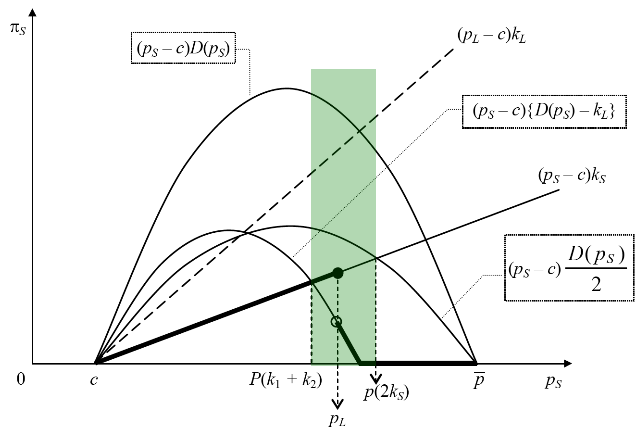
Figura 3.4. – *La funzione del profitto dell'impresa S, quando $p_L \leq p_k$*



25

Curve di reazione

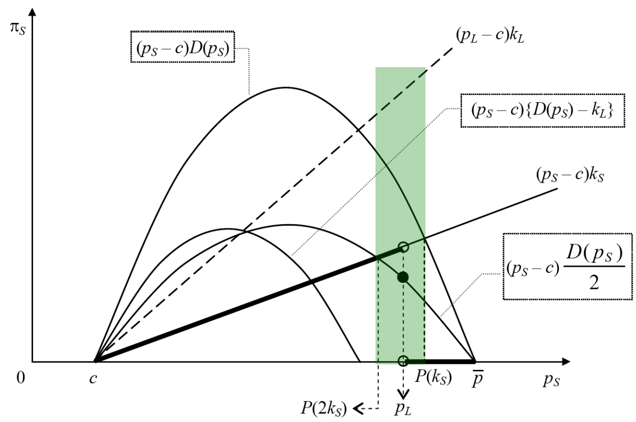
Figura 3.6. – *La funzione del profitto variabile dell'impresa S quando $P(k_1 + k_2) < p_L \leq P(2k_S)$*



26

Il modello di Edgeworth

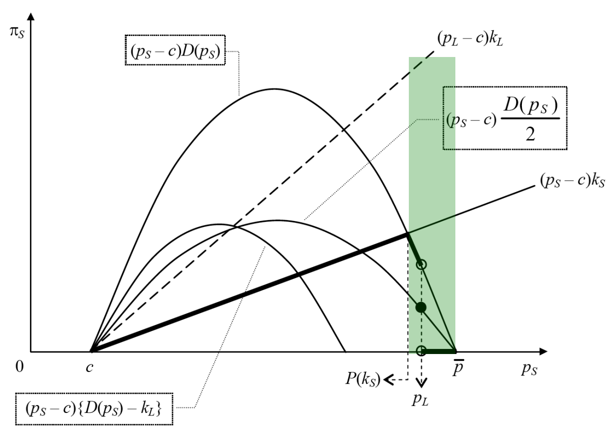
Figura 3.7. – *La funzione del profitto variabile dell'impresa S quando $P(2k_S) < p_L \leq P(k_S)$*



27

Il modello di Edgeworth

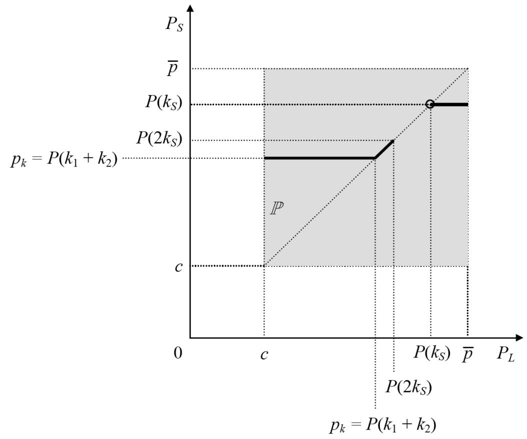
Figura 3.8. – *La funzione del profitto variabile dell'impresa S quando $P(k_S) < p_L \leq \overline{p}$*



28

Curve di reazione

Figura 3.9. – *La curva di reazione dell'impresa S quando* $(k_1, k_2) \in \mathbb{K}_B$



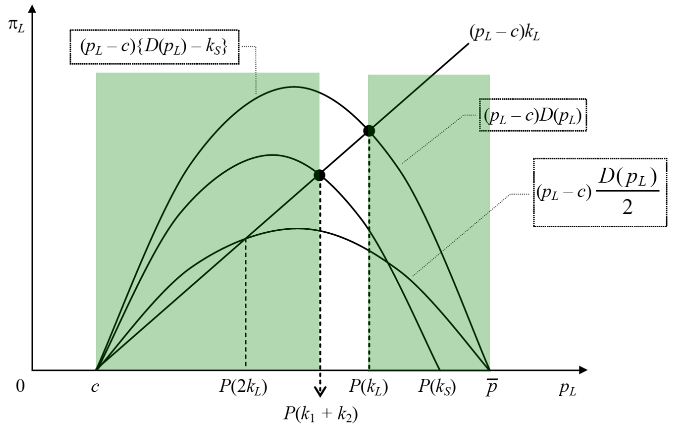
Curve di reazione

Allo scopo di determinare la funzione di reazione dell'impresa con la capacità più alta (impresa L) consideriamo i seguenti tre intervalli dove può trovarsi il prezzo della rivale (vedi Figura 3.10):

(v) $c \le p_S \le P(k_1 + k_2)$;
(vi) $P(k_1 + k_2) < p_S \le P(k_L)$;
(vii) $P(k_L) < p_S \le \overline{p}$.

Curve di reazione

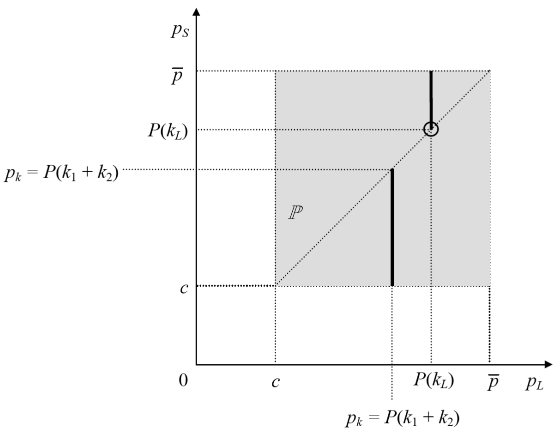
Figura 3.10. – *Schema delle funzioni del profitto dell'impresa L*



31

Curve di reazione

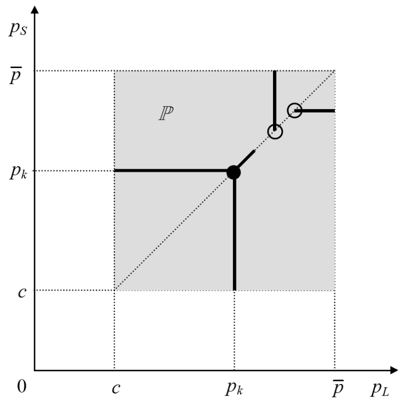
Figura 3.11. – *La curva di reazione dell'impresa L quando* $(k_1, k_2) \in \mathbb{K}_B$



32

Curve di reazione

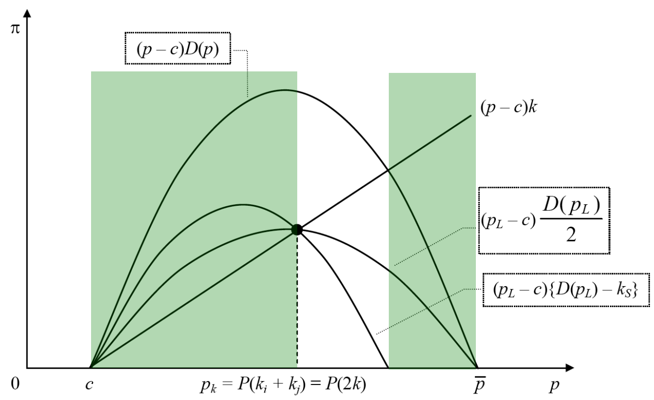
Figura 3.12. – *Le curve di reazione delle due imprese e l'equilibrio di Nash quando* $(k_1, k_2) \in \mathbb{K}_B$



33

Curve di reazione

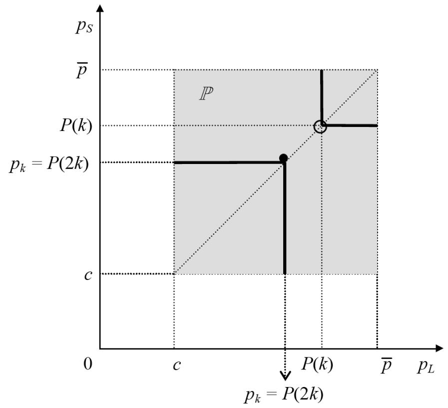
Figura 3.13. – *Schema delle funzioni del profitto delle imprese 1 e 2 quando* $k_1 = k_2 = k$ *e* $(k, k) \in \mathbb{K}_B$



34

Curve di reazione

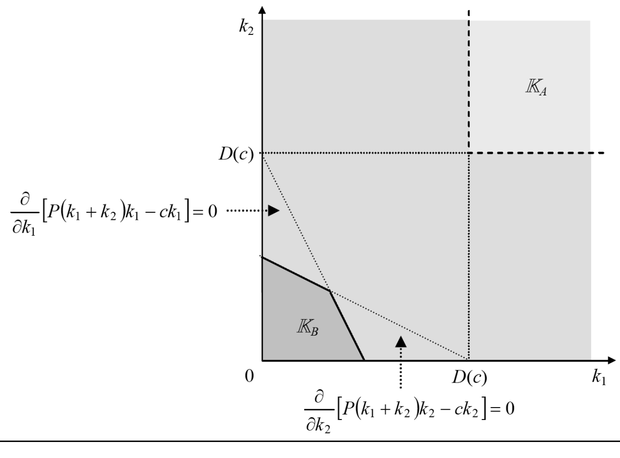
Figura 3.14. – *Le curve di reazione delle due imprese e l'equilibrio di Nash quando* $k_1 = k_2 = k$ *e* $(k,k) \in \mathbb{K}_B$.



35

Il modello di Edgeworth

Figura 3.5. – *Gli insiemi* $\mathbb{K}_A$ *e* $\mathbb{K}_B$



36

Curve di reazione

Passiamo adesso a costruire le funzioni di reazione, nel caso in cui $(k_1, k_2) \notin \mathbb{K}_A \cup \mathbb{K}_B$ e $k_L > k_S$. Il caso in cui $(k_1, k_2) \notin \mathbb{K}_A \cup \mathbb{K}_B$ e $k_1 = k_2$ è lasciato come utile esercizio per il lettore. Quando $(k_1, k_2) \notin \mathbb{K}_A \cup \mathbb{K}_B$, la funzione $(p - c)[D(p) - k_j]$, almeno per l'impresa più grande deve essere crescente per $p = p_k$; per $k_L > k_S$ deve quindi verificarsi una delle due seguenti condizioni:

$$\frac{\partial}{\partial p}(p-c)[D(p)-k_L] \leq 0 \text{ e } \frac{\partial}{\partial p}(p-c)[D(p)-k_S] > 0, \text{ per } p = p_k; \qquad [1]$$

$$\frac{\partial}{\partial p}(p-c)[D(p)-k_1] > 0 \text{ e } \frac{\partial}{\partial p}(p-c)[D(p)-k_2] > 0, \text{ per } p = p_k. \qquad [2]$$

37

Curve di reazione

Sia $p_M^{(i)}$

$$p_M^{(i)} = \arg\max_p (p-c)\min\{D(p)-k_j, k_i\}$$

e sia $p_m^{(i)}$ la soluzione in p dell'equazione

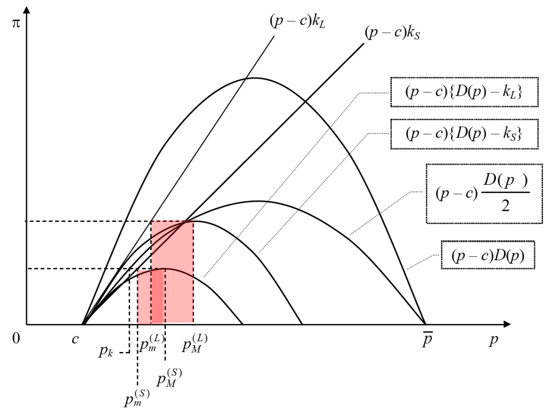
$$(p-c)\min\{k_i, D(p)\} = (p_M^{(i)} - c)\min\{D(p_M^{(i)}) - k_j, k_i\}$$

inferiore a $p_M^{(i)}$.

38

Curve di reazione

Figura 3.15. – *Schema delle funzioni del profitto variabile delle due imprese quando valgono le disuguaglianze (2)*



39