

Lezione 28/2/24

- Il modello di Edgeworth: introduzione, il gioco, esistenza di un equilibrio di Nash con strategie pure, le curve di reazione nei casi studiati finora. (Salvadori-D'Alessandro-Fanelli, Capitolo 3, sezioni 3.1, 3.2, e 3.4 fino a p. 43).

1

Il modello di Edgeworth

Assunzione 1: Numero di imprese. $I = \{1,2\}$ è l'insieme finito delle imprese concorrenti all'interno del mercato considerato.

Assunzione 2: Prodotti omogenei. Ogni impresa $i \in I$ produce un unico bene; i beni prodotti dalle imprese in I sono tra loro omogenei.

Assunzione 3: Domanda di mercato. Le preferenze dei consumatori determinano la funzione di domanda $Q = D(p)$, dove Q è la quantità domandata dal mercato e p è il prezzo di domanda, dotata delle seguenti caratteristiche tecniche. Esiste $\bar{p} > 0$ tale che:

$D(p)$ è definita e continua nell'intervallo $p \in \mathbb{R}_+$;

$D(p) = 0$ per $p \geq \bar{p}$;

$D(p) > 0$, $\forall p \in (0, \bar{p})$;

$D(p)$ è derivabile due volte in $(0, \bar{p})$ con derivate continue (in tale intervallo la funzione $D(p)$ è quindi di classe C^2), dove $D'(p) = \partial D(p) / \partial p < 0$ e $D''(p) = \partial^2 D(p) / \partial p^2 \leq 0$.

2

Il modello di Edgeworth

Assunzione 4: Costi. I costi di produzione che l'impresa $i \in I$ deve sostenere sono definiti dalla funzione $C(q_i, k_i)$, dove q_i è la quantità prodotta e venduta dalla generica impresa i , mentre k_i è la sua capacità produttiva:

$$C(q_i, k_i) = \begin{cases} F + rk_i + cq_i & \text{se } 0 \leq q_i \leq k_i \\ \infty & \text{se } q_i > k_i \end{cases}$$

Assunzione 5: Regola del razioneamento efficiente. Se $p_i < p_j$ e $D(p_i) > k_i$, allora la domanda $D(p_i) - k_i$ non è servita dall'impresa i e l'impresa j ottiene una domanda residua pari a $D_j = D(p_j) - k_i$.

Assunzione 7: Struttura temporale. Al tempo t_0 le imprese in I scelgono simultaneamente i prezzi di offerta.

Assunzione 8: Strategie. La variabile strategica impiegata dalla generica impresa $i \in I$ consiste nella scelta del prezzo di vendita del bene prodotto p_i : $p_i \in [c, \bar{p}]$.

3

Il modello di Edgeworth

L'Assunzione 1 definisce l'insieme finito dei giocatori. Le Assunzioni 7 e 8 definiscono lo spazio strategico di ciascuna impresa i , $\mathbb{P}_i = [c, \bar{p}]$. La combinazione dei prezzi adottata è il vettore nonnegativo $(p_1, p_2) \in \mathbb{P}$, dove \mathbb{P} è il prodotto cartesiano degli spazi strategici di ogni impresa: $\mathbb{P} = \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2 = [c, \bar{p}] \times [c, \bar{p}]$.

$$q_i = \min \{ D_i(p_i, p_j, k_j), k_i \}$$

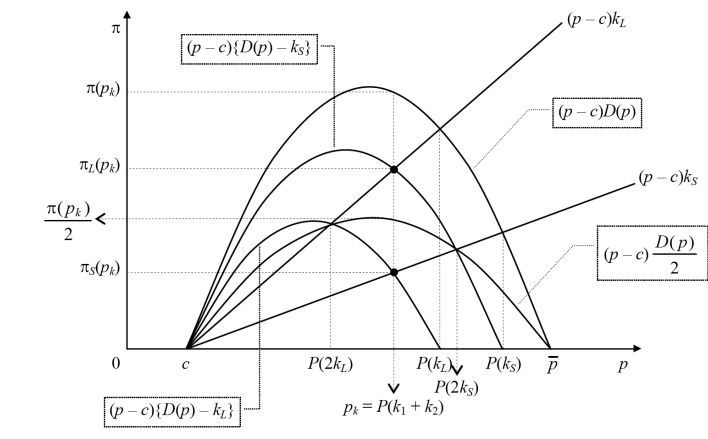
Le Assunzioni 2, 3, 4, e 5 consentono di definire la funzione del profitto della generica impresa i (o *funzione degli esiti* del generico giocatore i), Π_i , dato dalla differenza tra i ricavi totali $p_i q_i$ e i costi totali $C(q_i, k_i)$:

$$\Pi_i(p_1, p_2, k_1, k_2) = \begin{cases} (p_i - c) \min \{ D(p_i), k_i \} - F - rk_i & \text{se } p_i < p_j \\ (p_i - c) \min \left\{ \max \left\{ \frac{D(p_1)}{2}, D(p_1) - k_j \right\}, k_i \right\} - F - rk_i & \text{se } p_1 = p_2 \\ (p_i - c) \min \{ \max \{ 0, D(p_i) - k_j \}, k_i \} - F - rk_i & \text{se } p_i > p_j \end{cases}$$

4

Il modello di Edgeworth

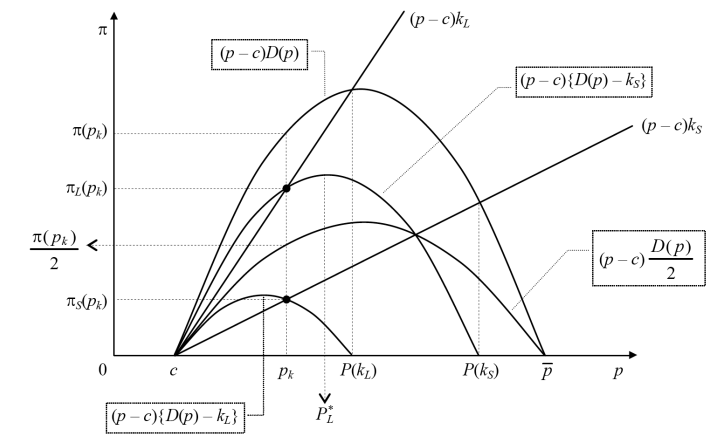
Figura 3.1. – Schema delle funzioni del profitto



5

Il modello di Edgeworth

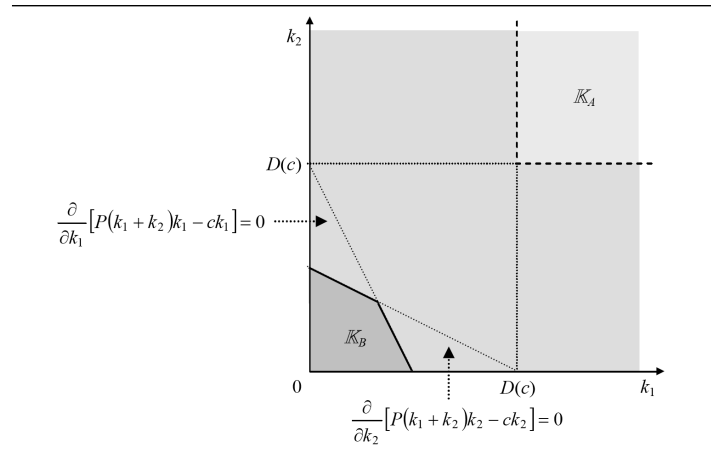
Figura 3.2. – Schema delle funzioni del profitto, altro caso



6

Il modello di Edgeworth

Figura 3.5. – Gli insiemi \mathbb{K}_A e \mathbb{K}_B



7

Curve di reazione

Passiamo adesso a costruire le funzioni di reazione, nel caso in cui $(k_1, k_2) \in \mathbb{K}_A \cup \mathbb{K}_B$ e $k_L > k_S$. Il caso in cui $(k_1, k_2) \notin \mathbb{K}_A \cup \mathbb{K}_B$ e $k_1 = k_2$ è lasciato come utile esercizio per il lettore. Quando $(k_1, k_2) \in \mathbb{K}_A \cup \mathbb{K}_B$, la funzione $(p - c)[D(p) - k_j]$, almeno per l'impresa più grande deve essere crescente per $p = p_k$; per $k_L > k_S$ deve quindi verificarsi una delle due seguenti condizioni:

$$\frac{\partial}{\partial p} (p - c)[D(p) - k_L] \leq 0 \text{ e } \frac{\partial}{\partial p} (p - c)[D(p) - k_S] > 0, \text{ per } p = p_k; \quad [1]$$

$$\frac{\partial}{\partial p} (p - c)[D(p) - k_1] > 0 \text{ e } \frac{\partial}{\partial p} (p - c)[D(p) - k_2] > 0, \text{ per } p = p_k. \quad [2]$$

8

Curve di reazione

Sia $p_M^{(i)}$

$$p_M^{(i)} = \arg \max_p (p - c) \min\{D(p) - k_j, k_i\}$$

e sia $p_m^{(i)}$ la soluzione in p dell'equazione

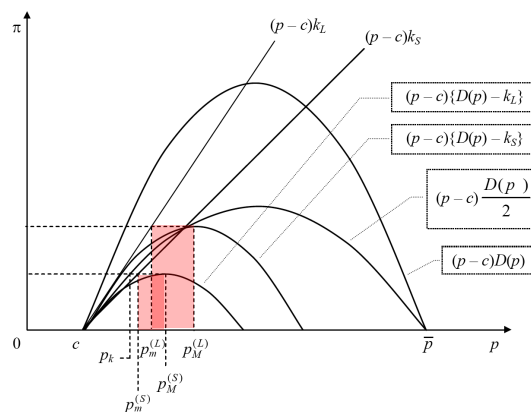
$$(p - c) \min\{k_i, D(p)\} = (p_M^{(i)} - c) \min\{D(p_M^{(i)}) - k_j, k_i\}$$

inferiore a $p_M^{(i)}$.

9

Curve di reazione

Figura 3.15. – Schema delle funzioni del profitto variabile delle due imprese quando valgono le disuguaglianze (2)



10

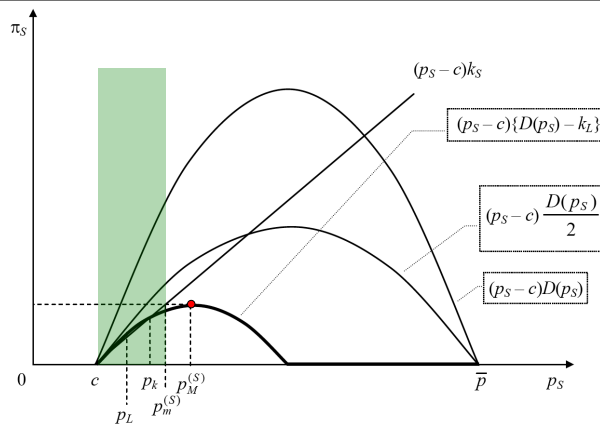
Curve di reazione

- (i) $c \leq p_L < p_m^{(S)}$;
- (ii) $p_L = p_m^{(S)}$;
- (iii) $p_m^{(S)} < p_L \leq P(2k_S)$;
- (iv) $P(2k_S) < p_L \leq P(k_S)$;
- (v) $P(k_S) < p_L \leq \bar{p}$.

11

Curve di reazione

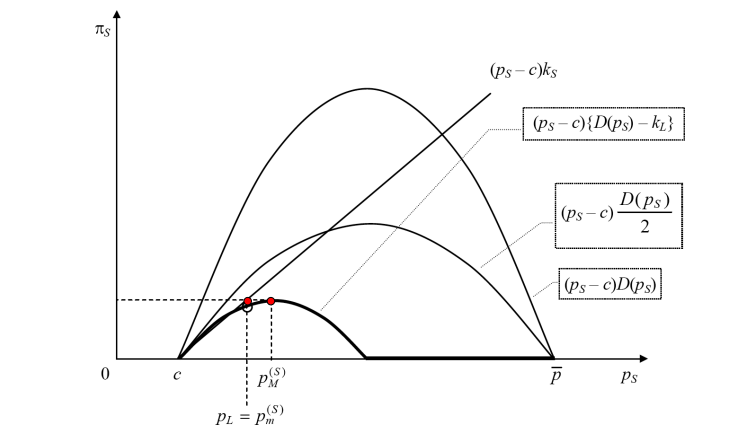
Figura 3.16. – La funzione del profitto variabile dell'impresa S quando $c \leq p_L < p_m^{(S)}$



12

Curve di reazione

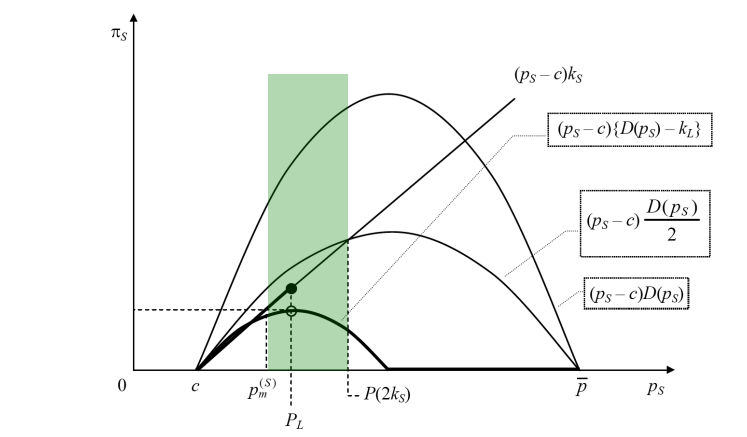
Figura 3.17. – La funzione del profitto variabile dell'impresa S quando $p_L = p_m^{(S)}$



13

Curve di reazione

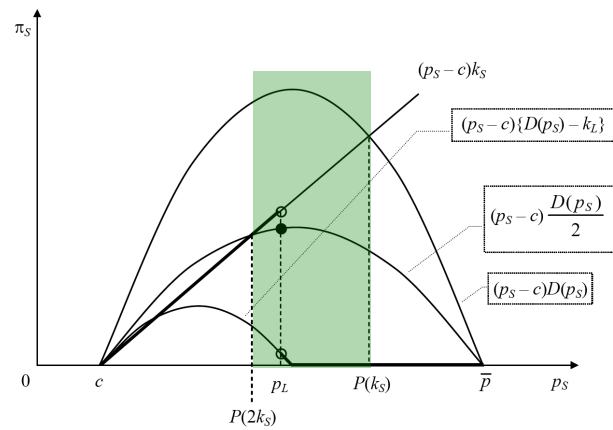
Figura 3.18. – La funzione del profitto variabile dell'impresa S quando $p_m^{(S)} < p_L \leq P(2k_S)$



14

Curve di reazione

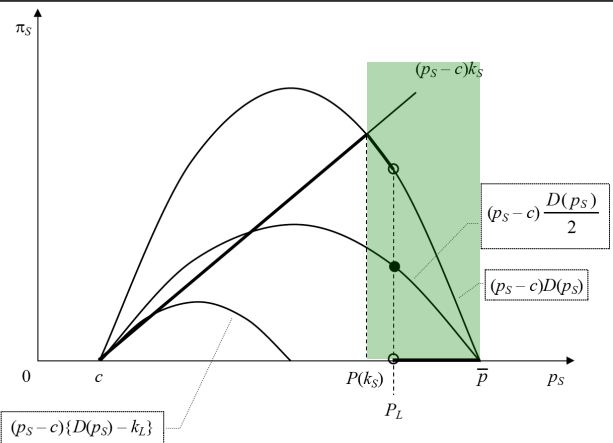
Figura 3.19. – La funzione del profitto variabile dell'impresa S quando $P(2k_S) < p_L \leq P(k_S)$



15

Curve di reazione

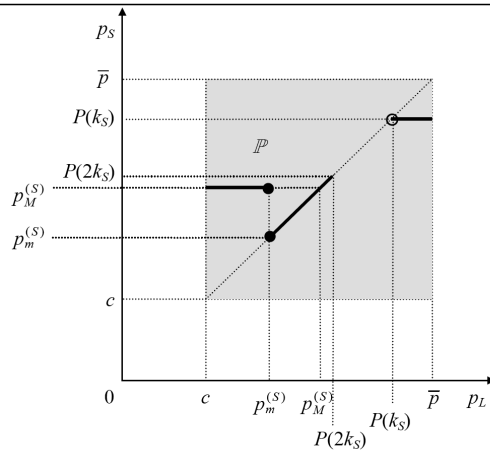
Figura 3.20. – La funzione del profitto variabile dell'impresa S quando $P(k_S) < p_L \leq \bar{p}$



16

Curve di reazione

Figura 3.21. – La curva di reazione dell'impresa S



17

Curve di reazione

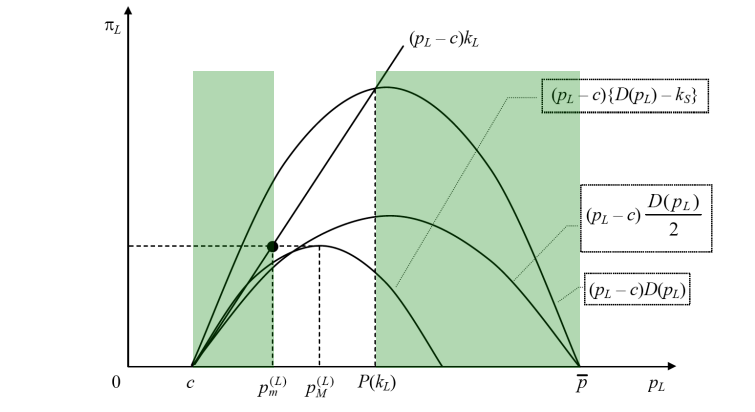
Allo scopo di determinare la funzione di reazione dell'impresa con la capacità superiore (impresa L) consideriamo i seguenti tre intervalli dove può trovarsi il prezzo della rivale (vedi Figura 3.22):

- (vi) $c \leq p_s \leq p_m^{(L)}$;
- (vii) $p_m^{(L)} < p_s \leq P(k_L)$;
- (viii) $P(k_L) < p_s \leq \bar{p}$.

18

Curve di reazione

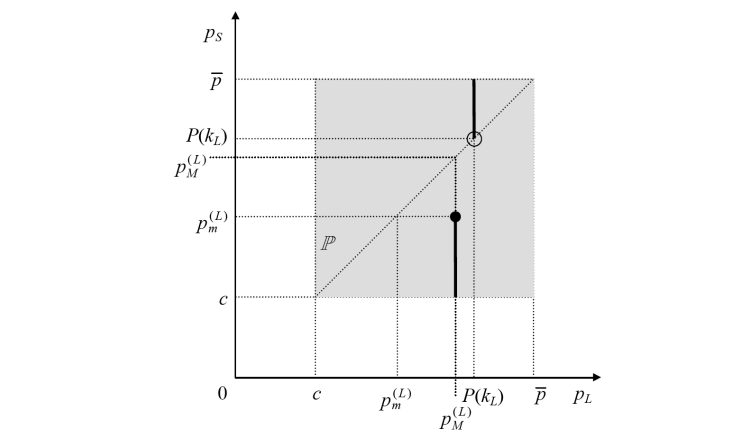
Figura 3.22. – Schema delle funzioni del profitto dell'impresa L



19

Curve di reazione

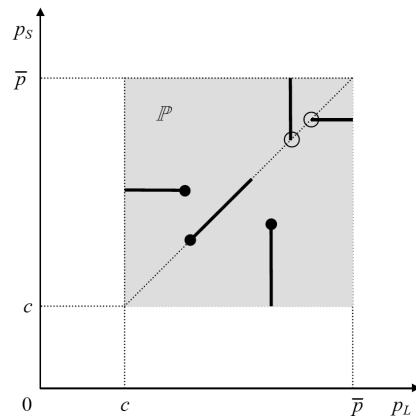
Figura 3.23. – La curva di reazione dell'impresa L



20

Curve di reazione

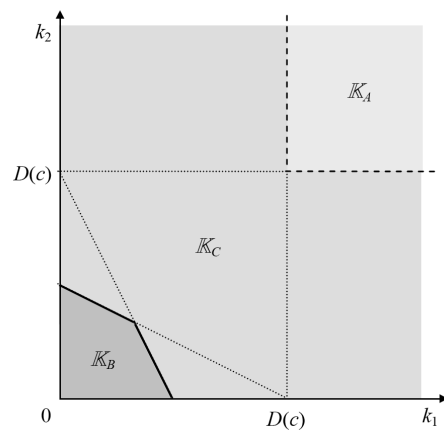
Figura 3.24. – Le curve di reazione delle due imprese



21

Il modello di Edgeworth

Figura 3.25. – Gli insiemi \mathcal{K}_A , \mathcal{K}_B e \mathcal{K}_C



22

Strategia mista: definizione

- Il giocatore A gioca una strategia mista quando invece di giocare con certezza una delle strategie (pure) a sua disposizione definisce una distribuzione di probabilità sull'insieme delle strategie pure a sua disposizione e gioca la strategia estratta.

23

Strategia mista: definizione

- Una distribuzione di probabilità può essere specificata in un numero di modi diversi, scelti per comodità matematica:
 - fornendo una funzione di densità discreta o densità di probabilità
 - fornendo una funzione di ripartizione, o funzione di probabilità cumulata.

24

Strategia mista: definizione

- La funzione di probabilità, o funzione di massa di probabilità, o densità discreta di una variabile casuale discreta X , è una funzione di variabile reale che assegna ad ogni valore possibile di X la probabilità dell'evento elementare.

25

Strategia mista: definizione

- Nel caso in cui la variabile casuale X sia continua, allora la funzione di probabilità è quasi ovunque nulla, quindi questa definizione è inutile. Al contrario, si utilizza o la funzione di densità di probabilità o la funzione di ripartizione, detta anche funzione di probabilità cumulata.

26

Strategia mista: definizione

- La funzione di ripartizione, o funzione di probabilità cumulata, di una variabile casuale X a valori reali è la funzione che associa a ciascun valore x la probabilità dell'evento "la variabile casuale X assume valori minori o uguali ad x ".

27

Esempio 1: esiti delle strategie pure

		B					
		b_1		b_2		b_3	
A	a_1	24	24	22	26	0	0
	a_2	22	26	24	24	0	0
	a_3	0	0	0	0	1	1

28

Esempio 1: strategie miste di A

- Se il giocatore A decide di giocare a_1 con probabilità p e a_2 con probabilità $(1 - p)$ e di non giocare mai a_3 , allora per il giocatore B l'esito atteso di b_1 sarà

$$24p + 26(1 - p) = 26 - 2p$$

mentre l'esito atteso di b_2 sarà

$$26p + 24(1 - p) = 24 + 2p.$$

29

Esempio 1: esiti delle strategie pure

Se $p < \frac{1}{2}$, allora $U(b_1) > 25 > U(b_2)$

pure

Se $p > \frac{1}{2}$, allora $U(b_1) < 25 < U(b_2)$

		B					
		b_1		b_2		b_3	
A	a_1	24	24	22	26	0	0
	a_2	22	26	24	24	0	0
	a_3	0	0	0	0	1	1
		26 - 2p		24 + 2p		0	

30

Esempio 1: strategie miste di B

- Se il giocatore B decide di giocare b_1 con probabilità q e b_2 con probabilità $(1 - q)$ e di non giocare mai b_3 , allora per il giocatore A l'esito atteso di a_1 sarà

$$24q + 22(1 - q) = 22 + 2q$$

mentre l'esito atteso di a_2 sarà

$$22q + 24(1 - q) = 24 - 2q.$$

31

Esempio 1: esiti delle strategie

Se $p < \frac{1}{2}$, allora $U(b_1) > 25 > U(b_2)$ pure Se $q < \frac{1}{2}$, allora $U(a_1) < 23 < U(a_2)$

Se $p > \frac{1}{2}$, allora $U(b_1) < 25 < U(b_2)$ Se $q > \frac{1}{2}$, allora $U(a_1) > 23 > U(a_2)$

		B						
		b_1		b_2		b_3		
A	a_1	24	24	22	26	0	0	$22 + 2q$
	a_2	22	26	24	24	0	0	$24 - 2q$
	a_3	0	0	0	0	1	1	0
		$26 - 2p$		$24 + 2p$		0		

32

Esempio 1: equilibrio di Nash

- Se $p < 1/2$, allora a B conviene giocare la strategia pura b_1 ($q = 1$). Se $p > 1/2$, allora a B conviene giocare la strategia pura b_2 ($q = 0$).
- Se $q < 1/2$, allora ad A conviene giocare la strategia pura a_2 ($p = 0$). Se $q > 1/2$, allora ad A conviene giocare la strategia pura a_1 ($p = 1$).
- Se $p = 1/2$ e $q = 1/2$, allora nessuno dei giocatori è interessato ad un cambio di strategia.

33

Esito atteso di una **strategia pura** data la strategia mista del rivale

- Media ponderata degli esiti utilizzando come pesi le probabilità assegnate dalla distribuzione di probabilità che definisce la strategia mista del rivale alle sue strategie pure.

$$U_B(b_1, p) = 26 - 2p$$

$$U_B(b_2, p) = 24 + 2p$$

$$U_B(b_3, p) = 0$$

$$U_A(a_1, q) = 22 + 2q$$

$$U_A(a_2, q) = 24 - 2q$$

$$U_A(a_3, q) = 0$$

34

Esito atteso di una **strategia mista** data la strategia mista del rivale

- Media ponderata degli esiti attesi data la strategia mista del rivale utilizzando come pesi le probabilità assegnate dalla distribuzione di probabilità che definisce la strategia mista.

$$U_A(p, q) = pU_A(a_1, q) + (1-p)U_A(a_2, q) = p(22 + 2q) + (1-p)(24 - 2q) = 24 - 2p - 2q + 4pq$$

$$U_B(q, p) = qU_B(b_1, p) + (1-q)U_B(b_2, p) = q(26 - 2p) + (1-q)(24 + 2p) = 24 + 2q + 2p - 4pq$$

35

Equilibrio di Nash

- Siano $U_A(p, q)$ e $U_B(p, q)$ l' esito atteso del giocatore A e del giocatore B, rispettivamente. La coppia di strategie miste (p^*, q^*) è un equilibrio di Nash se

$$U_A(p^*, q^*) \geq U_A(p, q^*)$$

$$U_B(p^*, q^*) \geq U_B(p^*, q)$$

per ogni p e per ogni q .

36

Supporto di una strategia mista

- Definiamo il supporto di una strategia mista come l'insieme delle strategie pure che possono essere giocate con la strategia mista data.

$$S_{Ap} = \{a_1, a_2\}$$

$$S_{Bq} = \{b_1, b_2\}$$

		B					
		b ₁		b ₂		b ₃	
A	a ₁	24	24	22	26	0	0
	a ₂	22	26	24	24	0	0
	a ₃	0	0	0	0	1	1

37

Equilibrio di Nash

- La coppia di strategie miste (p^*, q^*) è un equilibrio di Nash se esistono due numeri h_A ed h_B tali che
 - $U_A(a, q^*) = h_A$ per ogni a nel supporto di p^* e $U_A(a, q^*) < h_A$ al di fuori del supporto e
 - $U_B(p^*, b) = h_B$ per ogni b nel supporto di q^* e $U_B(p^*, b) < h_B$ al di fuori del supporto.

38

Esempio 2: esiti delle strategie

Se $p < \frac{4}{15}$, allora $U(b_1) > \frac{104}{15} > U(b_2)$ **pure** Se $q < \frac{1}{2}$, allora $U(a_2) < U(a_1) < 13$

Se $p > \frac{4}{15}$, allora $U(b_1) < \frac{104}{15} < U(b_2)$ Se $q > \frac{1}{2}$, allora $U(a_2) > U(a_1) > 13$

Soluzioni:

$p=1, q=0,$
 $(10, 15)$

$p = \frac{4}{15}, q = \frac{1}{2},$

$\left(13, \frac{104}{15}\right)$

$p=0, q=1,$
 $(17, 8)$

		B				
		b_1	b_2			
a_1		16	4	10	15	$10 + 6q$
		17	8	9	4	
				$8 - 4p$	$4 + 11p$	

39

Esempio 3: esiti delle strategie

Se $p < \frac{1}{2}$, allora $U(b_1) > U(b_2) > 11/2$ **pure** Se $q < \frac{3}{4}$, allora $U(a_1) < 7/2 < U(a_2)$

Se $p > \frac{1}{2}$, allora $11/2 < U(b_1) < U(b_2)$ Se $q > \frac{3}{4}$, allora $U(a_1) > 7/2 > U(a_2)$

Soluzione:

$p = \frac{1}{2}, q = \frac{3}{4},$

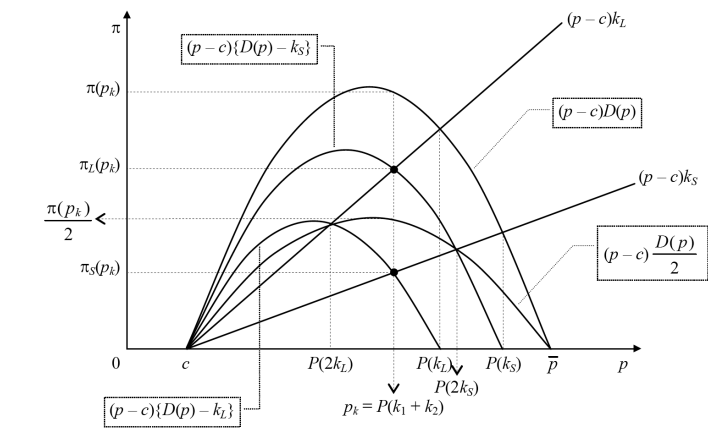
$\left(\frac{11}{2}, \frac{7}{2}\right)$

		B				
		b_1	b_2			
a_1		4	3	2	4	$2 + 2q$
		2	8	8	7	
				$8 - 5p$	$7 - 3p$	

40

Il modello di Edgeworth

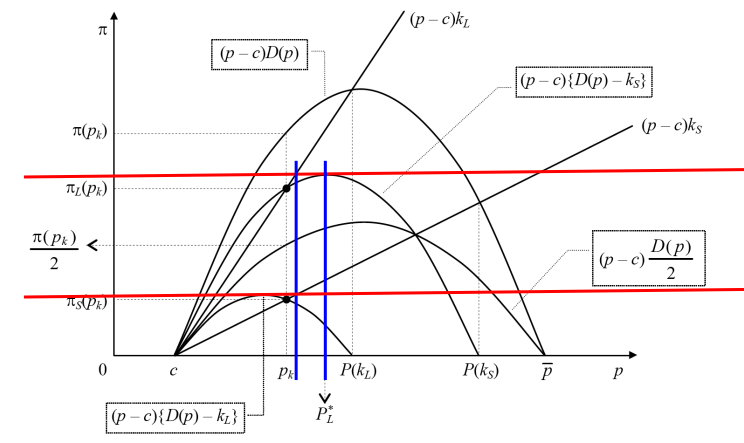
Figura 3.1. – Schema delle funzioni del profitto



41

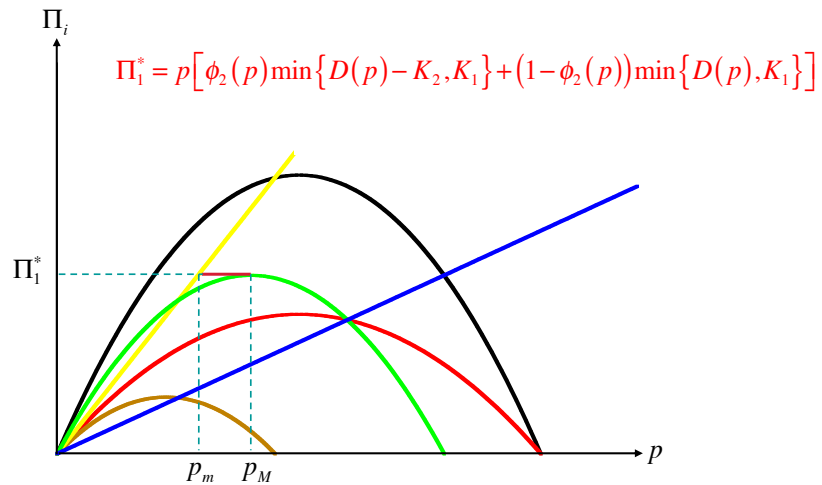
Il modello di Edgeworth

Figura 3.2. – Schema delle funzioni del profitto, altro caso



42

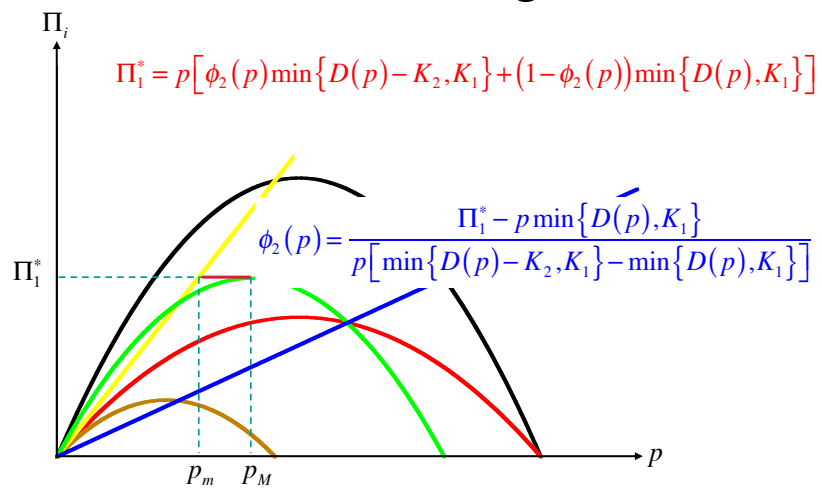
Il modello di Edgeworth



43

43

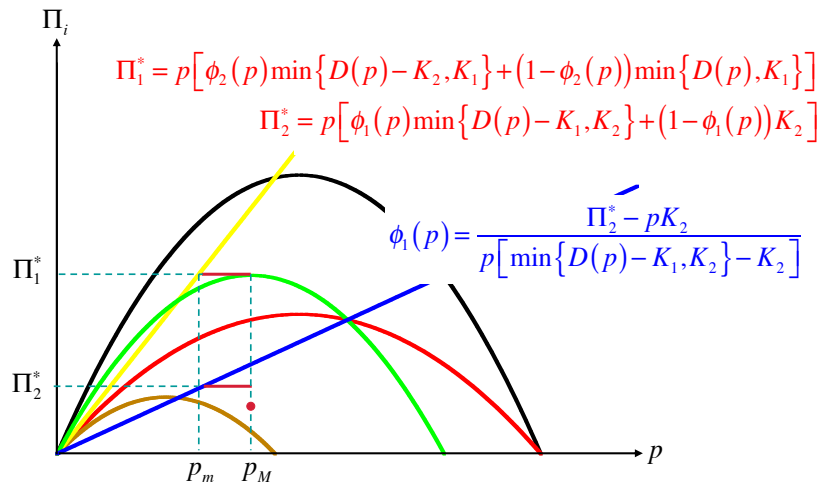
Il modello di Edgeworth



44

44

Il modello di Edgeworth

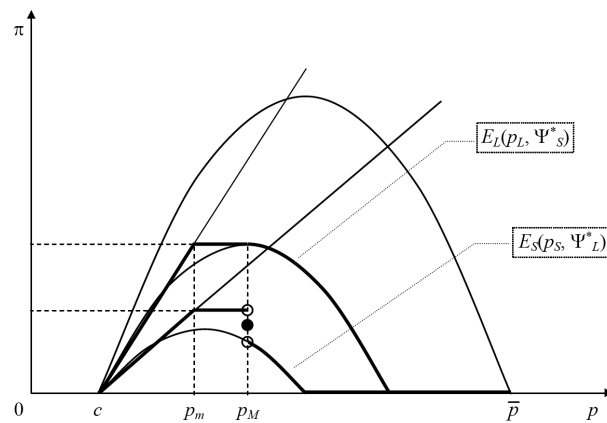


45

45

Il modello di Edgeworth

Figura 3.26. – Le funzioni $E_L(p, \Psi_S^*(p))$ e $E_S(p, \Psi_L^*(p))$, per $p \in [c, \bar{p}]$



46