Lezione 13/3/24

- Il gioco capacità-prezzo: Esistenza di un equilibrio perfetto nei sottogiochi (Salvadori-D'Alessandro-Fanelli, Capitolo 4; sezione 4.2).
- Il gioco prezzo-capacità (Salvadori-D'Alessandro-Fanelli, Capitolo 4; sezione 4.3).
- Introduzione al gioco varietà-prezzo (Salvadori-D'Alessandro-Fanelli, Capitolo 5; pp. 79-81).

1

Hotelling risponde a Edgeworth

- Cournot (1838).
- Bertrand (1883).
- Edgeworth (1897,1925).
- Sraffa (1926).
- Hotelling (1929).
- Joan V. Robinson (1933).
- Edward Hastings Chamberlin (1933).

2

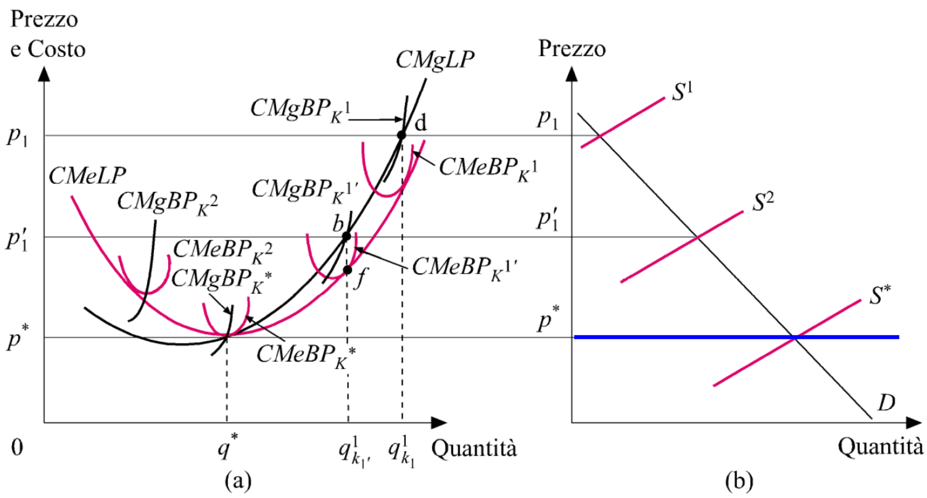
Concorrenza perfetta

- Atomicità,
- Omogeneità del prodotto,
- Informazione perfetta,
- Simmetria tecnologica,
- Libertà di entrata e di uscita.

- Price taker.

3

Concorrenza perfetta



4

Concorrenza *im*perfetta

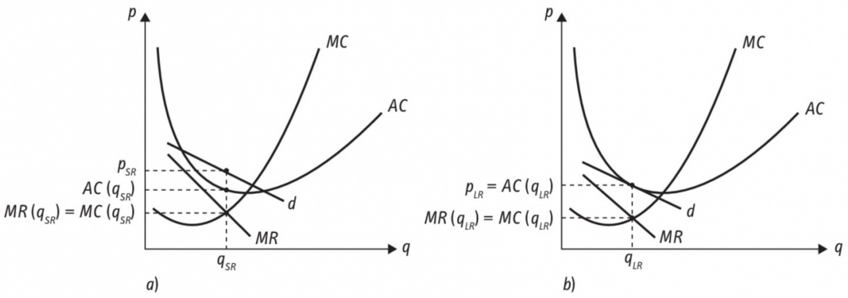
- Atomicità,
- ~~Omogeneità del prodotto,~~
- Informazione perfetta,
- Simmetria tecnologica,
- Libertà di entrata e di uscita.

- ~~Price taker.~~

5

Concorrenza *im*perfetta

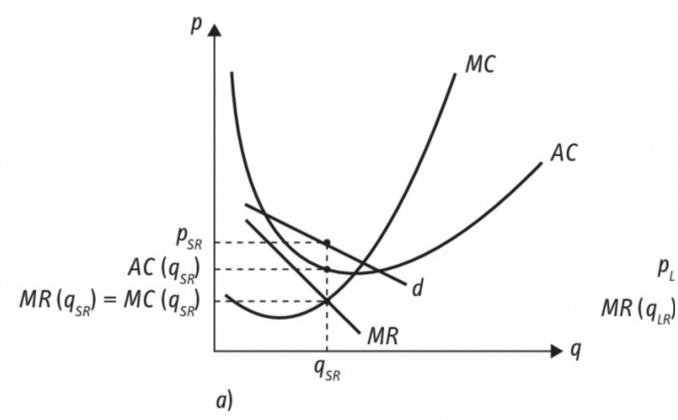
FIGURA 7 Equilibrio di mercato in regime di concorrenza monopolistica, nel breve periodo (*a*) e nel lungo periodo (*b*)



6

Concorrenza *im*perfetta

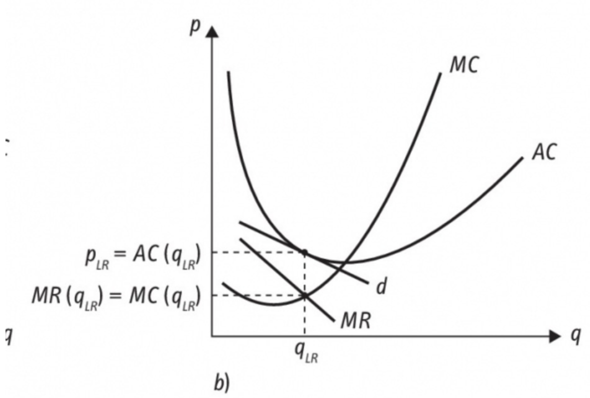
FIGURA 7 Equilibrio di mercato in regime di concorrenza m periodo (*b*)



7

Concorrenza *im*perfetta

›rrenza monopolistica, nel breve periodo (*a*) e nel lungo



8

Differenziazione del prodotto

- Differenziazione verticale
- Differenziazione orizzontale
- Il segmento di Hotelling

9

Il gioco varietà-prezzo

Assunzione 1: Numero di imprese. $I = \{1,2\}$ *è l'insieme finito delle imprese concorrenti all'interno del mercato considerato.*

~~**Assunzione 2: Prodotti omogenei**. *Ogni impresa* $i \in I$ *produce un unico bene; i beni prodotti dalle imprese in* I *sono tra loro omogenei.*~~

~~**Assunzione 3: Domanda di mercato**. *Le preferenze dei consumatori determinano la funzione di domanda* $Q = D(p)$*, dove* Q *è la quantità domandata dal mercato e* p *è il prezzo di domanda, dotata delle seguenti caratteristiche tecniche. Esiste* $\overline{p} > 0$ *tale che:*~~

~~$D(p)$ *è definita e continua nell'intervallo* $p \in \mathbb{R}_+$;~~

~~$D(p) = 0$ *per* $p \geq \overline{p}$;~~

~~$D(p) > 0, \ \forall p \in (0, \overline{p})$;~~

~~$D(p)$ *è derivabile due volte in* $(0, \overline{p})$ *con derivate continue (in tale intervallo la funzione* $D(p)$ *è quindi di classe* C^2*), dove* $D'(p) = \partial D(p)/\partial p \leq 0$ *e* $D''(p) = \partial^2 D(p)/\partial p^2 \leq 0$.~~

10

Il gioco varietà-prezzo

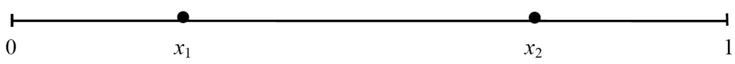
Assunzione 13: Preferenze e costi dei consumatori. *Nel mercato esiste un numero infinito di beni ideali merceologicamente omogenei tra loro, ma diversi per la collocazione ove sono disponibili lungo un segmento di lunghezza unitaria,* [0,1]. *Nel mercato esiste un numero infinito di consumatori distribuito uniformemente lungo il segmento* [0,1]*: per ogni punto t di questo segmento esiste un consumatore t che preferisce esattamente la varietà t del bene. Ciascun consumatore acquista una singola unità del bene. Il consumatore t che acquista la qualità* θ *del bene al prezzo p, sopporta un costo complessivo per l'acquisto del bene pari a* $p + b(\theta - t)^2$ *con* $b > 0$.

Assunzione 14: Prodotti differenziati. *Ogni impresa* $i \in I$ *produce un unico bene, ossia ha un'unica collocazione,* x_i*, sul segmento* [0,1]*; senza perdita di generalità,* $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1$.

11

Il gioco varietà-prezzo

Figura 5.1. – *Il segmento di Hotelling*



12

Il gioco varietà-prezzo

Assunzione 4: Costi. *I costi di produzione che l'impresa $i \in I$ deve sostenere sono definiti dalla funzione $C(q_i,k_i)$, dove q_i è la quantità prodotta e venduta dalla generica impresa i, mentre k_i è la sua capacità produttiva:*

$$C(q_i,k_i) = \begin{cases} F + rk_i + cq_i & \text{se} \quad 0 \le q_i \le k_i \\ \\ \infty & \text{se} \quad q_i > k_i \end{cases}$$

Assunzione 6: Dimensione delle imprese. *Ogni impresa i possiede una capacità produttiva k_i: $k_i \ge D(c)$.*

~~**Assunzione 7: Struttura temporale**. *Al tempo t_0 le imprese in I scelgono simultaneamente i prezzi di offerta.*~~

~~**Assunzione 8: Strategie**. *La variabile strategica impiegata dalla generica impresa $i \in I$ consiste nella scelta del prezzo di vendita del bene prodotto p_i: $p_i \in [c, \bar{p}]$.*~~

13

Il gioco varietà-prezzo

Assunzione 15: Struttura temporale. *La concorrenza tra le imprese si realizza in due stadi successivi:*

– nel primo stadio (t_0), le imprese in I scelgono, simultaneamente e indipendentemente, la varietà del prodotto (la collocazione) desiderata;

– nel secondo stadio (t_1), le imprese in I, dopo essere venute a conoscenza della varietà (collocazione) adottata dalle imprese in I, scelgono, simultaneamente e indipendentemente, i prezzi di offerta.

Assunzione 16: Strategie. *Una strategia della generica impresa $i \in I$ è un elemento del prodotto cartesiano $\Upsilon_i = \mathbb{X}_i \times \mathbb{P}_i^{\mathbb{X}}$, lo spazio strategico, dove:*

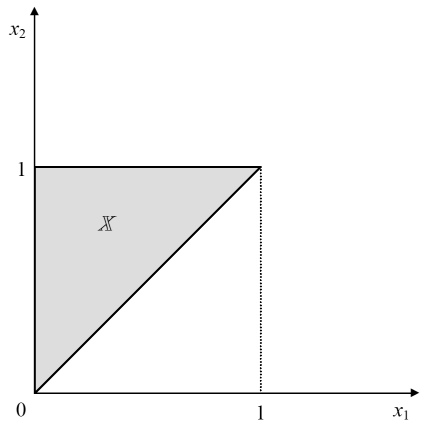
– $\mathbb{X}_i$ è l'insieme delle varietà adottabili dall'impresa i nel primo stadio del gioco ($\mathbb{X}_1 = [0, x_2]$ e $\mathbb{X}_2 = [0,1]$); e

– $\mathbb{P}_i^{\mathbb{X}} = \{\mathrm{p}_i^x : \mathbb{X} \to \mathbb{P}_i\}$ è l'insieme delle funzioni il cui dominio e codominio sono, rispettivamente, $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2$ e $\mathbb{P}_i = [c, \infty]$.

14

Il gioco varietà-prezzo

Figura 5.2. – *L'insieme* $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2$



15

Il gioco varietà-prezzo

L'Assunzione 1 definisce l'*insieme finito dei giocatori*. Le Assunzioni 15 e 16 definiscono lo *spazio strategico* di ciascuna impresa i, $\Upsilon_i = \mathbb{X}_i \times \mathbb{P}_i^{\mathbb{X}}$. Ad ogni coppia di strategie, una per l'impresa 1 ed una per l'impresa 2, è associato un vettore nonnegativo $(x_1, x_2) \in \mathbb{X}$ ed un vettore nonnegativo $(p_1, p_2) \in \mathbb{P}$.

Dobbiamo chiarire che le assunzioni 4-6 e 13-14 sono in grado di determinare il profitto delle imprese, ossia gli esiti (payoff) dei giocatori.

16

Il gioco varietà-prezzo: domanda

Se $x_1 = x_2$, allora:

$$D_i\left(p_i, p_j\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } x_i = x_j \text{ e } p_i > p_j \\ \dfrac{1}{2} & \text{se } x_i = x_j \text{ e } p_i = p_j \\ 1 & \text{se } x_i = x_j \text{ e } p_i < p_j \end{cases}$$

17

Il gioco varietà-prezzo: domanda

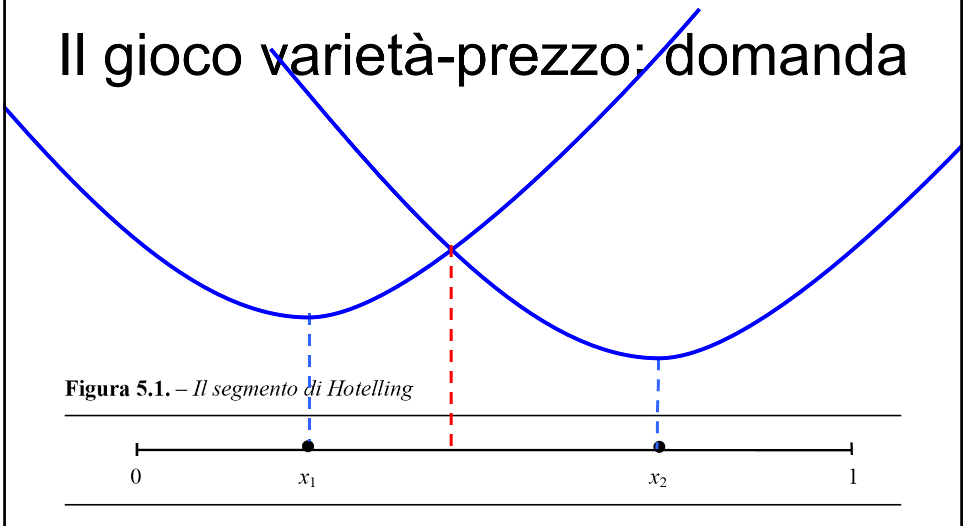


Figura 5.1. – *Il segmento di Hotelling*

18

Il gioco varietà-prezzo: domanda

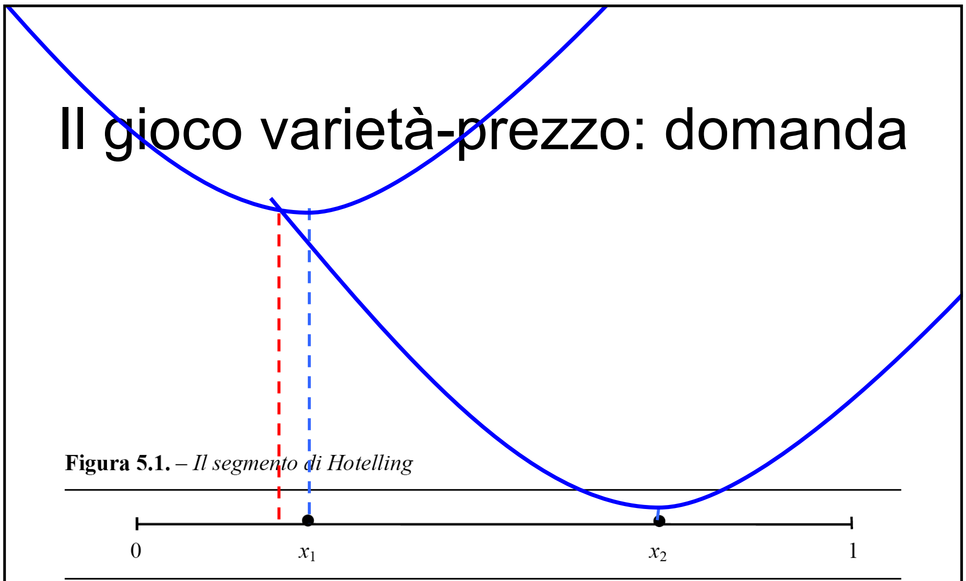
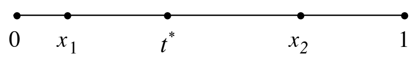


Figura 5.1. – *Il segmento di Hotelling*

19

Il gioco varietà-prezzo: domanda



$$p_1 + b\left(x_1 - t\right)^2 = p_2 + b\left(x_2 - t\right)^2$$

$$p_1 + b\left(x_1^2 - 2x_1 t + t^2\right) = p_2 + b\left(x_2^2 - 2x_2 t + t^2\right)$$

$$p_1 + b\left(x_1^2 - 2x_1 t\right) = p_2 + b\left(x_2^2 - 2x_2 t\right)$$

20

Il gioco varietà-prezzo: domanda

$$2b\left(x_2 - x_1\right)t = p_2 - p_1 + b\left(x_2^2 - x_1^2\right)$$

$$t^* = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{p_2 - p_1}{2b\left(x_2 - x_1\right)}$$

$$\boxed{p_1 + b\left(x_1^2 - 2x_1 t\right) = p_2 + b\left(x_2^2 - 2x_2 t\right)}$$

21

Il gioco varietà-prezzo: domanda

$$0 \le \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{p_2 - p_1}{2b\left(x_2 - x_1\right)} \le 1$$

$$\boxed{t^* = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{p_2 - p_1}{2b\left(x_2 - x_1\right)}}$$

$$0 \le t^* \le 1$$

22

Il gioco varietà-prezzo: domanda

$$\boxed{0 \le \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{p_2 - p_1}{2b\left(x_2 - x_1\right)} \le 1}$$

$$0 \le b\left(x_2^2 - x_1^2\right) + p_2 - p_1 \le 2b\left(x_2 - x_1\right)$$

$$p_1 - p_2 \le b\left(x_2^2 - x_1^2\right)$$

$$b\left(x_2 - x_1\right)\left(2 - x_1 - x_2\right) \ge p_2 - p_1$$

23

Il gioco varietà-prezzo: domanda

$$D_1\left(x_1, x_2, p_1, p_2\right) = \min\left\{1, \max\left\{0, \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{p_2 - p_1}{2b\left(x_2 - x_1\right)}\right\}\right\} =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } p_1 > p_2 + b\left(x_2^2 - x_1^2\right) \\ \dfrac{x_1 + x_2}{2} + \dfrac{p_2 - p_1}{2b\left(x_2 - x_1\right)} & \text{se } \max\left\{0, p_2 - b\left(x_2 - x_1\right)\left(2 - x_1 - x_2\right)\right\} \le p_1 \le p_2 + b\left(x_2^2 - x_1^2\right) \\ 1 & \text{se } 0 \le p_1 < p_2 - b\left(x_2 - x_1\right)\left(2 - x_1 - x_2\right) \end{cases}$$

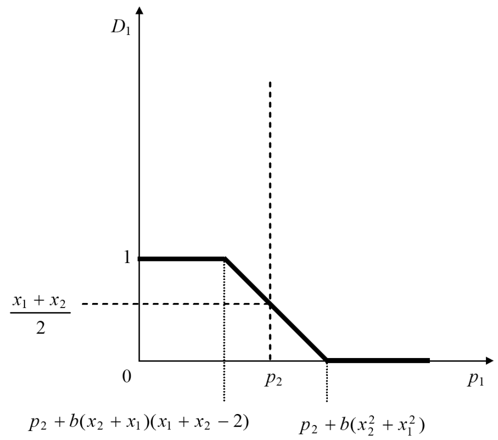
$$D_2\left(x_1, x_2, p_1, p_2\right) = \min\left\{1, \max\left\{0, 1 - \frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{p_2 - p_1}{2b\left(x_2 - x_1\right)}\right\}\right\} =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } p_2 > p_1 + b\left(x_2 - x_1\right)\left(2 - x_1 - x_2\right) \\ 1 - \dfrac{x_1 + x_2}{2} - \dfrac{p_2 - p_1}{2b\left(x_2 - x_1\right)} & \text{se } \max\left\{0, p_1 - b\left(x_2^2 - x_1^2\right)\right\} \le p_2 \le p_1 + b\left(x_2 - x_1\right)\left(2 - x_1 - x_2\right) \\ 1 & \text{se } 0 \le p_2 < p_1 - b\left(x_2^2 - x_1^2\right) \end{cases}$$

24

Il gioco varietà-prezzo: domanda

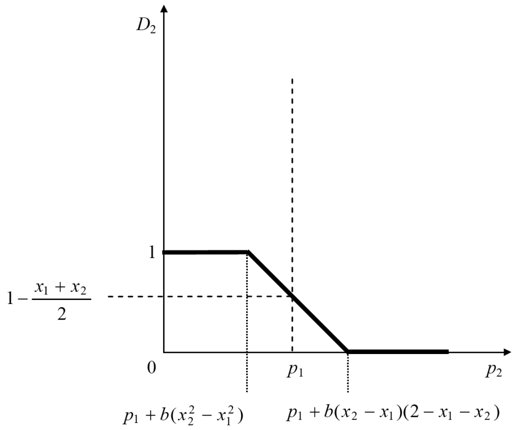
Figura 5.3. – *La domanda del bene x_1 come funzione di p_1, considerando dati x_1, x_2, e p_2*



25

Il gioco varietà-prezzo: domanda

Figura 5.4. – *La domanda del bene x_2 come funzione di p_2, considerando dati x_1, x_2, e p_1*



26

Il gioco varietà-prezzo: profitto

$$\pi_1(x_1,x_2,p_1,p_2)=(p_1-c)\max\left\{0,\min\left\{1,\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{p_2-p_1}{2b(x_2-x_1)}\right\}\right\}=$$

$$=\begin{cases}(p_1-c) & \text{se } c\le p_1\le \max\{c,p_2-b(x_2-x_1)(2-x_1-x_2)\}\\ (p_1-c)\left[\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{p_2-p_1}{2b(x_2-x_1)}\right] & \text{se } \max\{c,p_2-b(x_2-x_1)(2-x_1-x_2)\}\le p_1\le p_2+b(x_2^2-x_1^2)\\ 0 & \text{se } p_1\ge p_2+b(x_2^2-x_1^2)\end{cases}$$

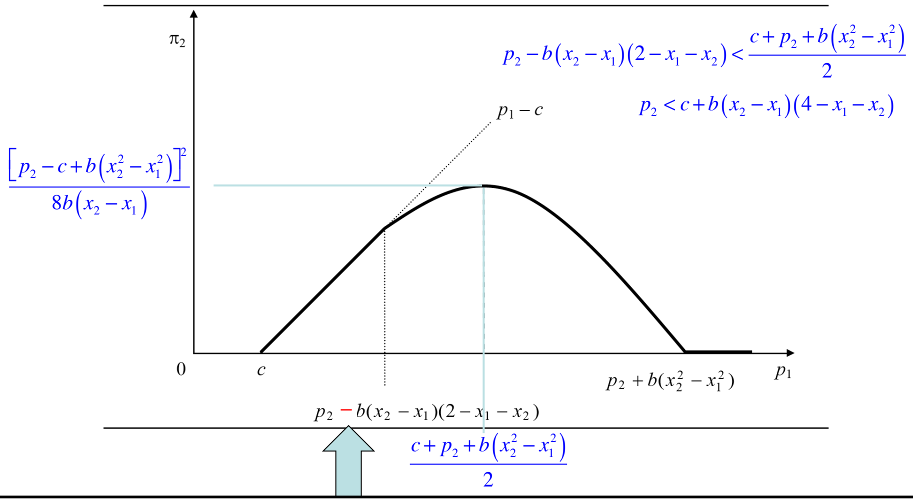
$$\pi_2(x_1,x_2,p_1,p_2)=(p_2-c)\max\left\{0,\min\left\{1,1-\frac{x_1+x_2}{2}-\frac{p_2-p_1}{2b(x_2-x_1)}\right\}\right\}=$$

$$=\begin{cases}(p_2-c) & \text{se } c\le p_2\le \max\{c,p_1-b(x_2^2-x_1^2)\}\\ (p_2-c)\left[1-\frac{x_1+x_2}{2}-\frac{p_2-p_1}{2b(x_2-x_1)}\right] & \text{se } \max\{c,p_1-b(x_2^2-x_1^2)\}\le p_2\le p_1+b(x_2-x_1)(2-x_1-x_2)\\ 0 & \text{se } p_2\ge p_1+b(x_2-x_1)(2-x_1-x_2)\end{cases}$$

27

Il gioco varietà-prezzo: profitto

Figura 5.5. – *La funzione del profitto dell'impresa 1 come funzione di p_1, considerando dati $x_1 < x_2$ e p_2*



28

Il gioco varietà-prezzo: profitto

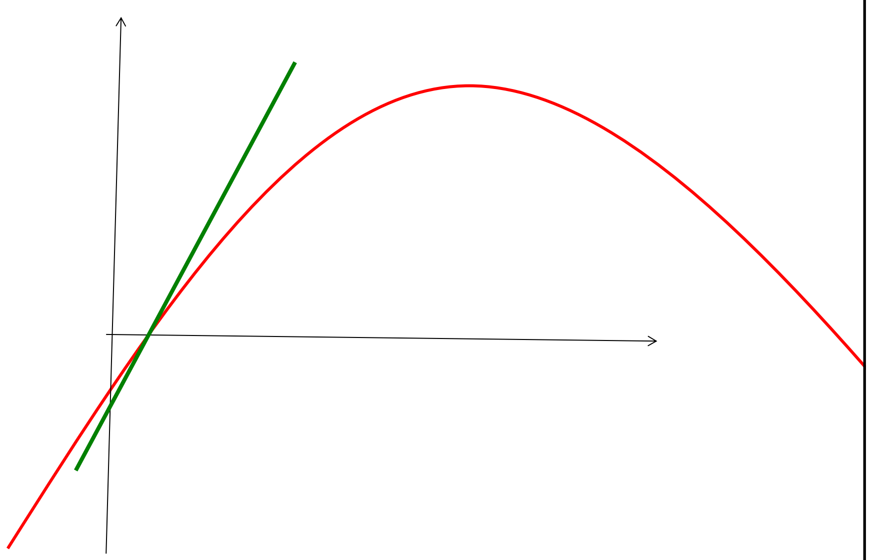
$$p_2 - b(x_2 - x_1)(2 - x_1 - x_2) < \frac{c + p_2 + b(x_2^2 - x_1^2)}{2}$$

$$2p_2 - 2b(x_2 - x_1)(2 - x_1 - x_2) < c + p_2 + b(x_2^2 - x_1^2)$$

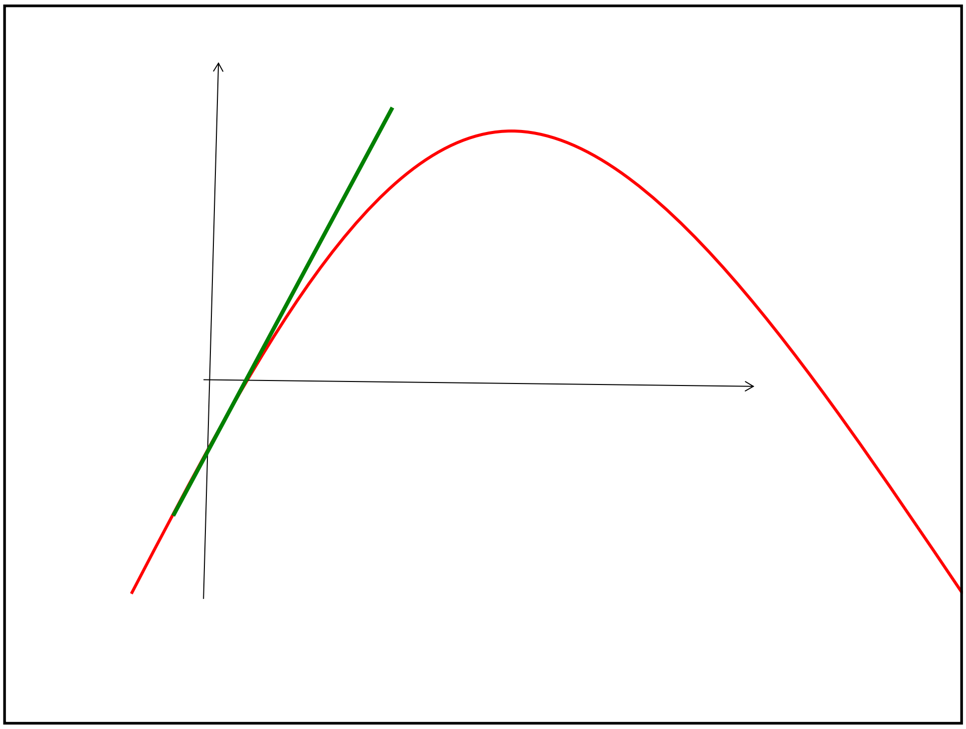
$$p_2 < c + b(x_2 - x_1)(4 - 2x_1 - 2x_2 + x_1 + x_2)$$

$$p_2 < c + b(x_2 - x_1)(4 - x_1 - x_2)$$

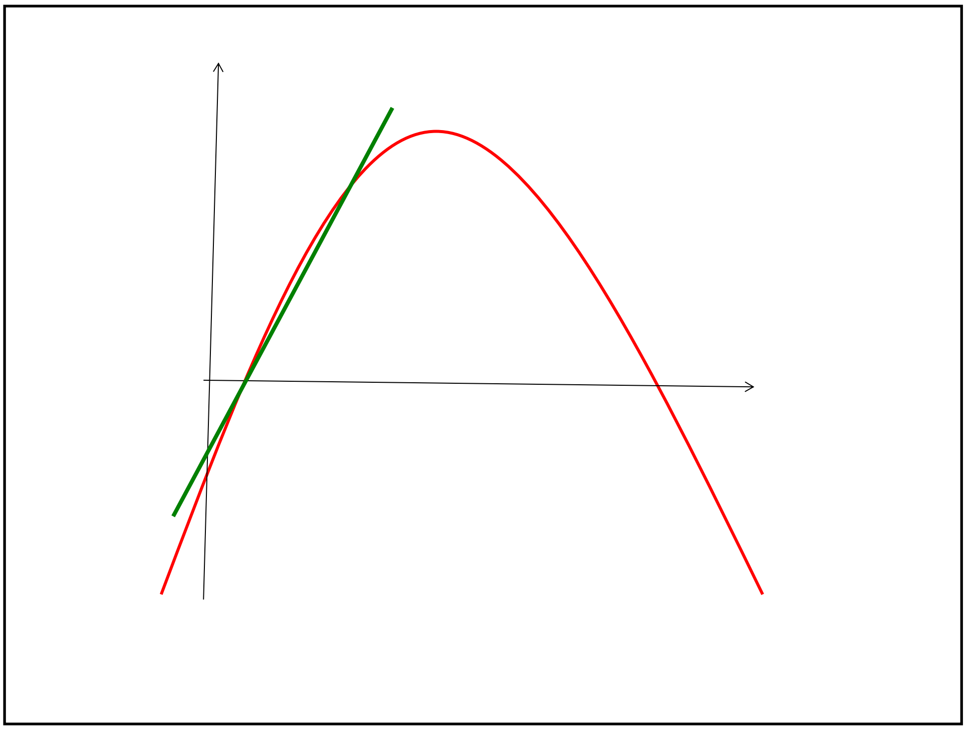
29



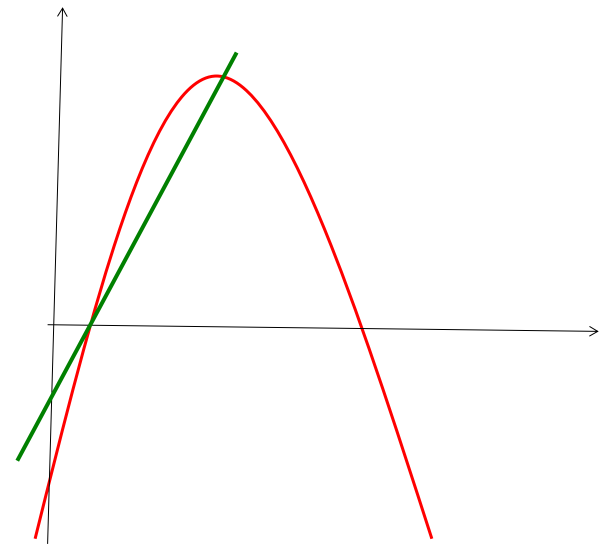
30



31



32



33

Il gioco varietà-prezzo: profitto

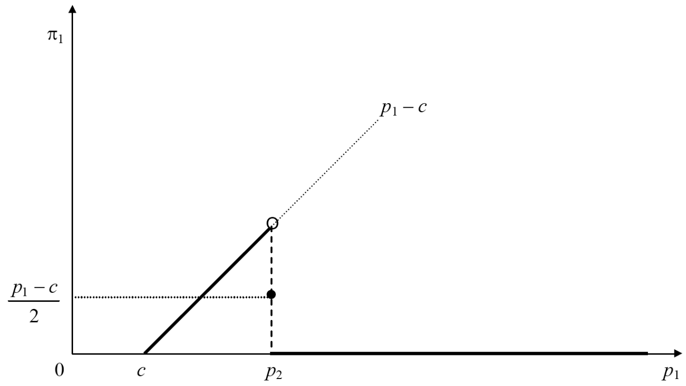
Se $x_1 = x_2$, allora:

$$\pi_i\left(p_i, p_j\right) = \begin{cases} p_i - c & \text{se } p_i < p_j \\ \dfrac{p_j - c}{2} & \text{se } p_i = p_j \\ 0 & \text{se } p_i > p_j \end{cases}$$

34

Il gioco varietà-prezzo: profitto

Figura 5.6. – *La funzione del profitto dell'impresa 1 come funzione di p_1, considerando dati $x_1 = x_2$ e p_2.*



35

Il gioco varietà-prezzo

Utilizzando il *metodo dell'induzione a ritroso* dimostriamo l'esistenza di un unico *equilibrio di Nash perfetto nei sottogiochi*. Iniziamo con definire i sottogiochi di prezzo. Ciascun sottogioco di prezzo si basa sulle Assunzioni 1, 4-6, 13-14 e sulle assunzioni

A.5.1 x_1 e x_2 $(0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1)$ sono dati;

A.5.2 le imprese in I scelgono, simultaneamente e indipendentemente, i prezzi di offerta;

A.5.3 le strategie a disposizione dell'impresa $i \in I$ sono gli elementi dell'insieme $\mathbb{P}_i = [c, \infty]$.

36

Il sottogioco dei prezzi

In un equilibrio di Nash in strategie pure necessariamente entrambe le imprese producono parte del bene.

$$t^* \geq 1 \Rightarrow c \leq p_1 < p_2 - b(x_2 - x_1)(2 - x_1 - x_2)$$

l'impresa 2 ha profitti variabili nulli, mentre potrebbe ottenere profitti variabili positivi scegliendo

$$c < p_2 < c + b(x_2 - x_1)(2 - x_1 - x_2)$$

37

Il sottogioco dei prezzi

In un equilibrio di Nash in strategie pure necessariamente entrambe le imprese producono parte del bene.

$$t^* \leq 0 \Rightarrow c \leq p_2 < p_1 - b(x_2^2 - x_1^2)$$

l'impresa 1 ha profitti variabili nulli, mentre potrebbe ottenere profitti variabili positivi scegliendo

$$c < p_1 < c + b(x_2^2 - x_1^2)$$

38

Il sottogioco dei prezzi

$$p_2 < b(x_2 - x_1)(4 - x_1 - x_2) + c$$
$$p_1 < b(x_2 - x_1)(2 + x_1 + x_2) + c$$

$$\begin{cases} \max\limits_{p_1} (p_1 - c)\left[\dfrac{x_1 + x_2}{2} + \dfrac{p_2 - p_1}{2b(x_2 - x_1)}\right] \\ \max\limits_{p_2} (p_2 - c)\left[1 - \dfrac{x_1 + x_2}{2} - \dfrac{p_2 - p_1}{2b(x_2 - x_1)}\right] \end{cases}$$

39

Il sottogioco dei prezzi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial p_1}\left\{(p_1 - c)\left[\dfrac{x_1 + x_2}{2} + \dfrac{p_2 - p_1}{2b(x_2 - x_1)}\right]\right\} = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial p_2}\left\{(p_2 - c)\left[1 - \dfrac{x_1 + x_2}{2} - \dfrac{p_2 - p_1}{2b(x_2 - x_1)}\right]\right\} = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} \max\limits_{p_1} (p_1 - c)\left[\dfrac{x_1 + x_2}{2} + \dfrac{p_2 - p_1}{2b(x_2 - x_1)}\right] \\ \max\limits_{p_2} (p_2 - c)\left[1 - \dfrac{x_1 + x_2}{2} - \dfrac{p_2 - p_1}{2b(x_2 - x_1)}\right] \end{cases}}$$

40

Il sottogioco dei prezzi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial p_1}\left\{(p_1-c)\left[\dfrac{x_1+x_2}{2}+\dfrac{p_2-p_1}{2b(x_2-x_1)}\right]\right\}=0 \\ \dfrac{\partial}{\partial p_2}\left\{(p_2-c)\left[1-\dfrac{x_1+x_2}{2}-\dfrac{p_2-p_1}{2b(x_2-x_1)}\right]\right\}=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\dfrac{x_1+x_2}{2}+\dfrac{p_2-p_1}{2b(x_2-x_1)}\right]-\dfrac{p_1-c}{2b(x_2-x_1)}=0 \\ \left[1-\dfrac{x_1+x_2}{2}-\dfrac{p_2-p_1}{2b(x_2-x_1)}\right]-\dfrac{p_2-c}{2b(x_2-x_1)}=0 \end{cases}$$

41

Il sottogioco dei prezzi

$$\begin{cases} \dfrac{x_1+x_2}{2}+\dfrac{p_2-2p_1+c}{2b(x_2-x_1)}=0 \\ 1-\dfrac{x_1+x_2}{2}+\dfrac{p_1-2p_2+c}{2b(x_2-x_1)}=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\dfrac{x_1+x_2}{2}+\dfrac{p_2-p_1}{2b(x_2-x_1)}\right]-\dfrac{p_1-c}{2b(x_2-x_1)}=0 \\ \left[1-\dfrac{x_1+x_2}{2}-\dfrac{p_2-p_1}{2b(x_2-x_1)}\right]-\dfrac{p_2-c}{2b(x_2-x_1)}=0 \end{cases}$$

42

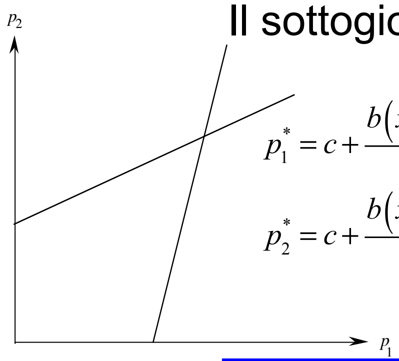
Il sottogioco dei prezzi

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{x_1+x_2}{2}+\dfrac{p_2-2p_1+c}{2b\left(x_2-x_1\right)}=0 \\ 1-\dfrac{x_1+x_2}{2}+\dfrac{p_1-2p_2+c}{2b\left(x_2-x_1\right)}=0 \end{cases}}$$

$$\begin{cases} p_1=\dfrac{b\left(x_2-x_1\right)\left(x_1+x_2\right)+p_2+c}{2} \\ p_2=\dfrac{b\left(x_2-x_1\right)\left(2-x_1-x_2\right)+p_1+c}{2} \end{cases}$$

43

Il sottogioco dei prezzi



$$p_1^*=c+\frac{b\left(x_2-x_1\right)\left(2+x_1+x_2\right)}{3}$$

$$p_2^*=c+\frac{b\left(x_2-x_1\right)\left(4-x_1-x_2\right)}{3}$$

$$\boxed{\begin{cases} p_1=\dfrac{b\left(x_2-x_1\right)\left(x_1+x_2\right)+p_2+c}{2} \\ p_2=\dfrac{b\left(x_2-x_1\right)\left(2-x_1-x_2\right)+p_1+c}{2} \end{cases}}$$

44

Il sottogioco dei prezzi

$$\boxed{\begin{aligned} p_1^* &= c + \frac{b(x_2 - x_1)(2 + x_1 + x_2)}{3} \\ p_2^* &= c + \frac{b(x_2 - x_1)(4 - x_1 - x_2)}{3} \end{aligned}}$$

$$p_1 - c = \frac{b(x_2 - x_1)(2 + x_1 + x_2)}{3}$$

$$p_2 - c = \frac{b(x_2 - x_1)(4 - x_1 - x_2)}{3}$$

$$p_2 - p_1 = \frac{2b(x_2 - x_1)(1 - x_1 - x_2)}{3}$$

45

Il sottogioco dei prezzi

$$\pi_1(x_1, x_2, p_1, p_2) = (p_1 - c)\max\left\{0, \min\left\{1, \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{p_2 - p_1}{2b(x_2 - x_1)}\right\}\right\} =$$

$$= \begin{cases} (p_1 - c) & \text{se } \; c \le p_1 \le \max\{c, p_2 - b(x_2 - x_1)(2 - x_1 - x_2)\} \\ (p_1 - c)\left[\dfrac{x_1 + x_2}{2} + \dfrac{p_2 - p_1}{2b(x_2 - x_1)}\right] & \text{se } \; \max\{c, p_2 - b(x_2 - x_1)(2 - x_1 - x_2)\} \le p_1 \le p_2 + b(x_2^2 - x_1^2) \\ 0 & \text{se } \; p_1 \ge p_2 + b(x_2^2 - x_1^2) \end{cases}$$

$$p_1 - c = \frac{b(x_2 - x_1)(2 + x_1 + x_2)}{3}$$

$$p_2 - p_1 = \frac{2b(x_2 - x_1)(1 - x_1 - x_2)}{3}$$

$$\pi_1(x_1, x_2) = \left[\frac{b(x_2 - x_1)(2 + x_1 + x_2)}{3}\right]\left[\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{(x_2 - x_1)(1 - x_1 - x_2)}{3(x_2 - x_1)}\right]$$

46

Il sottogioco dei prezzi

$$\pi_1(x_1,x_2)=\left[\frac{b(x_2-x_1)(2+x_1+x_2)}{3}\right]\left[\frac{3(x_1+x_2)+2(1-x_1-x_2)}{6}\right]$$

$$\pi_1(x_1,x_2)=\frac{b(x_2-x_1)(2+x_1+x_2)^2}{18}$$

$$\pi_2(x_1,x_2)=\frac{b(x_2-x_1)(-4+x_1+x_2)^2}{18}$$

$$\boxed{\pi_1(x_1,x_2)=\left[\frac{b(x_2-x_1)(2+x_1+x_2)}{3}\right]\left[\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{(x_2-x_1)(1-x_1-x_2)}{3(x_2-x_1)}\right]}$$

47

Il gioco varietà-prezzo

<u>Lemma 5.1.</u> *Se $x_1 < x_2$, allora esiste un unico equilibrio di Nash in strategie pure del sottogioco di prezzo dato dalle equazioni:*

$$p_1^* = c + \frac{b(x_2-x_1)(2+x_1+x_2)}{3} \qquad [7]$$

$$p_2^* = c + \frac{b(x_2-x_1)(4-x_1-x_2)}{3} \qquad [8]$$

dove i profitti (variabili) di equilibrio risultano pari a:

$$\pi_1^* = \frac{b(x_2-x_1)(2+x_1+x_2)^2}{18} \qquad [9]$$

$$\pi_2^* = \frac{b(x_2-x_1)(-4+x_1+x_2)^2}{18} \qquad [10]$$

Se invece $x_1 = x_2$, allora esiste un unico equilibrio di Nash in strategie pure del sottogioco di prezzo dato dalle equazioni:

$$p_1^* = p_2^* = c$$

con profitti (variabili) di equilibrio pari a:

$$\pi_1^* = \pi_2^* = 0$$

che corrisponde all'equilibrio di Bertrand.

48

Il sottogioco delle varietà

Possiamo adesso definire il sottogioco delle varietà, che si basa sull'Assunzione 1 e sulle seguenti assunzioni.

A.5.4 Le imprese in I scelgono, simultaneamente e indipendentemente, la varietà del prodotto (la collocazione) desiderata nel segmento [0, 1];

A.5.5 Gli insiemi delle strategie a disposizione delle imprese in I sono $\mathbb{X}_1 = [0, x_2]$ per l'impresa 1 e $\mathbb{X}_2 = [0,1]$ per l'impresa 2;

A.5.6 Gli esiti delle imprese in I sono definiti dalle funzioni

$$\Pi_1 = \frac{b(x_2 - x_1)(2 + x_1 + x_2)^2}{18} - F$$
$$\Pi_2 = \frac{b(x_2 - x_1)(-4 + x_1 + x_2)^2}{18} - F$$

49

Il sottogioco delle varietà

$$\pi_1(x_1, x_2) = \frac{b(x_2 - x_1)(2 + x_1 + x_2)^2}{18}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\Pi_1(x_1, x_2) = \frac{b}{18}\left[-(2 + x_1 + x_2)^2 + 2(x_2 - x_1)(2 + x_1 + x_2)\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\Pi_1(x_1, x_2) = \frac{b}{18}\left[-2 - 3x_1 + x_2\right](2 + x_1 + x_2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\Pi_1(x_1, x_2) = -\frac{b}{18}(2 + 3x_1 - x_2)(2 + x_1 + x_2) < 0$$

50

Il sottogioco delle varietà

$$\pi_1\left(x_1,x_2\right)=\frac{b\left(x_2-x_1\right)(2+x_1+x_2)^2}{18}$$

$$\pi_2\left(x_1,x_2\right)=\frac{b\left(x_2-x_1\right)\left(-4+x_1+x_2\right)^2}{18}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\Pi_1\left(x_1,x_2\right)=-\frac{b}{18}\left(2+3x_1-x_2\right)\left(2+x_1+x_2\right)<0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\Pi_2\left(x_2,x_1\right)=\frac{b}{18}\left(4+x_1-3x_2\right)\left(4-x_1-x_2\right)>0$$

51

Il sottogioco delle varietà

$$\pi_1\left(x_1,x_2\right)=\frac{b\left(x_2-x_1\right)(2+x_1+x_2)^2}{18}$$

$$\pi_2\left(x_1,x_2\right)=\frac{b\left(x_2-x_1\right)\left(-4+x_1+x_2\right)^2}{18}$$

$$x_1=0 \qquad x_2=1$$

$$\pi_1\left(x_1,x_2\right)=\frac{9b}{18}=\frac{b}{2}$$

$$\pi_2\left(x_1,x_2\right)=\frac{9b}{18}=\frac{b}{2}$$

52

Il sottogioco delle varietà

$$p_1^* = c + \frac{b(x_2 - x_1)(2 + x_1 + x_2)}{3}$$
$$p_2^* = c + \frac{b(x_2 - x_1)(4 - x_1 - x_2)}{3}$$

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = 1$$

$$p_1^* = c + b$$

$$p_2^* = c + b$$

53

Il sottogioco delle varietà

<u>Proposizione 5.1.</u> *Nel gioco varietà-prezzo esiste un unico equilibrio di Nash in strategie pure perfetto nei sottogiochi:*

$$(x_1^*, x_2^*) = (0,1), \ (p_1^*, p_2^*) = (c+b, c+b)$$

e i profitti di equilibrio delle due imprese sono pari a

$$\Pi_1^* = \Pi_2^* = \frac{b}{2} - F \, .$$

54