# Lezione 15/3/24

- Concorrenza imperfetta e concorrenza monopolistica (Cabral, Capitolo 4; sezione 3: pp. 107-110).
- Il modello varietà-prezzo: assunzioni, il gioco, l'equilibrio (Salvadori-D'Alessandro-Fanelli, Capitolo 5; sezione 5.1).

1

# Paradosso di Bertrand

- Le imprese non sono in grado di coprire i costi fissi.

- Alternativa 1: Vincoli di capacità (modello di Edgeworth; gioco capacità-prezzo).
- Alternativa 2: Differenziazione del prodotto (modello di Hotelling).
- Alternativa 3: Collusione tra imprese.

2

## Il dilemma del prigioniero

| | | B | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $b_1$ | | $b_2$ | |
| A | $a_1$ | -1 | -1 | -6 | 0 |
| | $a_2$ | 0 | -6 | -5 | -5 |

3

## Il dilemma del prigioniero: altro esempio

| | | B | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $b_1$ | | $b_2$ | |
| A | $a_1$ | 8 | 8 | 1 | 14 |
| | $a_2$ | 14 | 1 | 5 | 5 |

4

# Il dilemma del prigioniero: struttura

| | | B | |
|---|---|---|---|
| | | $b_C$ | $b_{NC}$ |
| A | $a_C$ | $C$ $C$ | $ND$ $D$ |
| | $a_{NC}$ | $D$ $ND$ | $NC$ $NC$ |

$$D > C > NC > ND$$

5

# I giochi ripetuti

- Supergioco
- Gioco costituente
- Regole del gioco costituente e regole del supergioco

6

## Regole

- Numero dei giocatori;
- Strategie a disposizione di ciascun giocatore (un piano di azioni o mosse che ciascun giocatore può compiere in risposta a quelle degli altri giocatori);
- Esiti (payoff) associati a ogni combinazione di strategie giocabili.

7

## Strategie (caso di due giocatori)

- Siano *A* e *B* gli insiemi di strategie a disposizione dei due giocatori nel gioco costituente.
- Le stategie del supergioco sono così definite:

$$a \in A, b \in B, E = A \times B, E^t = E^{t-1} \times E$$

$$\mathsf{A}_1 : E \rightarrow A, \mathsf{A}_2 : E^2 \rightarrow A, \ \ldots \ , \mathsf{A}_t : E^t \rightarrow A$$

$$\Sigma_A = A \times \mathsf{A}_1 \times \mathsf{A}_2 \times \ \ldots \ \times \mathsf{A}_t \times \ \ldots$$

$$\mathsf{B}_1 : E \rightarrow B, \mathsf{B}_2 : E^2 \rightarrow B, \ \ldots \ , \mathsf{B}_t : E^t \rightarrow B$$

$$\Sigma_B = B \times \mathsf{B}_1 \times \mathsf{B}_2 \times \ \ldots \ \times \mathsf{B}_t \times \ \ldots$$

8

## Esiti (caso di due giocatori)

- Siano date le strategie dei giocatori

$$h_A \in \Sigma_A = A \times \mathsf{A}_1 \times \mathsf{A}_2 \times \ \ldots \times \mathsf{A}_t \times \ \ldots \times \mathsf{A}_T$$

$$h_B \in \Sigma_B = B \times \mathsf{B}_1 \times \mathsf{B}_2 \times \ \ldots \times \mathsf{B}_t \times \ \ldots \times \mathsf{B}_T$$

cui sono associati gli esiti dei singoli stadi

$$\left(g_{1h_A}, g_{1h_B}\right), \left(g_{2h_A}, g_{2h_B}\right), \ \ldots, \left(g_{th_A}, g_{th_B}\right), \ \ldots, \left(g_{Th_A}, g_{Th_B}\right)$$

Gli esiti del supergioco associati a questa coppia di strategie sono:

$$\left( \sum_{t=1}^{T} (1+r)^{-t} g_{th_A}, \sum_{t=1}^{T} (1+r)^{-t} g_{th_B} \right)$$

9

## Il dilemma del prigioniero ripetuto un numero finito di volte

- Può essere interpretato come un gioco sequenziale ed analizzato in termini di perfezione dei sottogiochi.

10

## Il dilemma del prigioniero ripetuto un numero infinito di volte

- Non siamo in grado di individuare tutti gli equilibri di Nash.
- Esistenza di strategie che giocate in modo credibile da un giocatore inducono l’altro giocatore a cooperare ad ogni stadio del gioco.

11

## Strategie che inducono l’altro giocatore a cooperare

- Trigger strategy
- Tit for tat strategy

12

## Trigger strategy: definizione

- Sia $a_t$ la strategia del giocatore *A* giocata o da giocare al tempo *t*.
- Sia $b_t$ la strategia del giocatore *B* giocata al tempo *t*.
- La Trigger strategy per il giocatore *A* consiste in

$$\begin{cases} a_t = a_C & \text{se } t = 1 \text{ o } t > 1 \text{ e } a_s = a_c \text{ e } b_s = b_c \ \forall s < t \\ a_t = a_{NC} & \text{in tutti gli altri casi} \end{cases}$$

13

## Trigger strategy: equilibrio di Nash

- Se entrambi i giocatori adottano la Trigger strategy, allora entrambi collaborano sempre.
- Domanda: è un equilibrio di Nash?
- Supponiamo che *A* l'adotti e che *B* adotti una qualsiasi strategia *y*.

14

# Trigger strategy: equilibrio di Nash

Per stabilire sotto quali condizioni la trigger strategy è un equilibrio di Nash, assumiamo che il giocatore 1 adotti questa strategia e il giocatore 2 valuti cosa fare, seguendo una qualsiasi strategia $y$.

Gli esiti ottenuti dal giocatore 2 sono rappresentati dalla successione $Y_0, Y_1, \ldots, Y_t, \ldots$.

Il valore della strategia $y$ è dato dal valore attuale degli esiti $V(y) = \sum_{t=0}^{\infty} d^t Yt$ dove $0 < d < 1$ è il fattore di sconto.

15

# Trigger strategy: equilibrio di Nash

Poiché il giocatore 1 gioca la *trigger strategy*, se $Y_{t'} = C$, allora $Y_t = C$ per ogni $t < t'$; inoltre non possono esistere $t'$ e $t''$, $t'' \neq t'$, tali che $Y_{t'} = Y_{t''} = D$. Abbiamo due casi possibili:

(i) Esiste $\tau \in \mathbb{N}_0$ tale che $Y_\tau = D$ e, se $\tau > 0$, $Y_t = C$ per ogni $0 \leq t < \tau$;

(ii) $Y_t = C$ per ogni $t$.

$$Y_t = C \Rightarrow Y_{t-1} = C,\ Y_{t+1} = C \text{ o } D$$

$$Y_t = NC \Rightarrow Y_{t-1} = NC \text{ o } D,\ Y_{t+1} = NC \text{ o } ND$$

$$Y_t = D \Rightarrow Y_{t-1} = C,\ Y_{t+1} = NC \text{ o } ND$$

$$Y_t = ND \Rightarrow Y_{t-1} = NC \text{ o } D,\ Y_{t+1} = NC \text{ o } ND$$

16

# Trigger strategy: equilibrio di Nash

Una strategia non coincide con la successione degli esiti in quanto strategie diverse possono dare luogo alla stessa successione. Se il valore attuale degli esiti della strategia $y$ è maggiore del valore attuale degli esiti della strategia $y'$ (nell'ipotesi che l'altro giocatore giochi la *trigger strategy*) diciamo che la strategia $y$ domina la strategia $y'$. Diciamo ugualmente che la strategia $y$ domina la strategia $y'$ quando il valore atteso degli esiti della strategia $y$ è uguale al valore atteso della strategia $y'$, ma la strategia $y$ conduce ad una maggiore collusione della strategia $y'$.

$$Y_t = C \Rightarrow Y_{t-1} = C,\ Y_{t+1} = C \text{ o } D$$
$$Y_t = NC \Rightarrow Y_{t-1} = NC \text{ o } D,\ Y_{t+1} = NC \text{ o } ND$$
$$Y_t = D \Rightarrow Y_{t-1} = C,\ Y_{t+1} = NC \text{ o } ND$$
$$Y_t = ND \Rightarrow Y_{t-1} = NC \text{ o } D,\ Y_{t+1} = NC \text{ o } ND$$

17

# Trigger strategy: equilibrio di Nash

Nel caso (i) la strategia $y$ è certamente dominata da altre strategie se $Y_t = ND$ per qualche $t > \tau$, per cui possiamo certamente supporre che $Y_t = NC$ per ogni $t > \tau$. Analizziamo questo caso. Consideriamo due strategie, $y$ e $y'$, tali che $Y_t = Y'_t$ per ogni $t$ tranne che in $\omega$ e $\omega + 1$ in cui $Y_\omega = C$, $Y_{\omega+1} = D$, $Y'_\omega = D$, $Y'_{\omega+1} = NC$ (ovviamente $Y_t = Y'_t = C$ se $0 \le t < \omega$ e $Y_t = Y'_t = NC$ se $t \ge \omega + 2$). La differenza tra i valori attuali degli esiti delle due strategie sono:

$$V(y) - V(y') = Cd^\omega + Dd^{\omega+1} - Dd^\omega - NCd^{\omega+1} = d^\omega(C - D) + d^{\omega+1}(D - NC).$$

18

# Trigger strategy: equilibrio di Nash

Se $V(y) - V(y') \geq 0$, allora la strategia $y$, che conduce ad una deviazione nel periodo $t = \omega + 1$, domina la strategia $y'$, che conduce ad una deviazione nel periodo $t = \omega$; mentre se $V(y) - V(y') < 0$, è, tra le due, la strategia in cui la deviazione avviene nel periodo $t = \omega$ a dominare la strategia in cui la deviazione avviene nel periodo $t = \omega + 1$. Dato che $V(y) - V(y') = d^{\omega}[(C - D) + (D - NC)d]$,

$$V(y) - V(y') \geq 0 \Leftrightarrow d \geq \frac{D-C}{D-NC} \Leftrightarrow r \leq \frac{C-NC}{D-C}.$$

$$(C-D)+(D-NC)d \geq 0$$
$$(D-NC)d \geq D-C$$
$$d \geq \frac{D-C}{D-NC} \Leftrightarrow r \leq \frac{C-NC}{D-C}$$

$$\frac{1}{1+r} \geq \frac{D-C}{D-NC}$$
$$D-NC \geq (1+r)(D-C)$$
$$C-NC \geq r(D-C)$$

19

# Trigger strategy: equilibrio di Nash

Il segno di $V(y) - V(y')$ non dipende da $\omega$, quindi dati gli esiti e il fattore di sconto (ovvero il saggio d'interesse) sappiamo che se queste disuguaglianze sono rispettate, al giocatore 2 conviene una strategia che procrastina la defezione all'infinito, mentre conviene una strategia che anticipa la deviazione al periodo $t = 0$ nel caso opposto. Questo significa che ci sono solo due insiemi di strategie che possono essere dominanti: quelle con gli esiti (ii), che sono dominanti se e solo se $r \leq (C - NC)/(D - C)$, e quelle con gli esiti $Y_0 = D$ e $Y_t = NC$ per ogni $t \geq 1$, che sono dominanti se e solo se $r > (C - NC)/(D - C)$

20

## Trigger strategy: equilibrio di Nash

$$r \le \frac{C-NC}{D-C} \Rightarrow$$

$$\cancel{(i)\exists\tau : Y_t = C \text{ se } t<\tau, Y_\tau = D, Y_t = NC \text{ se } t>\tau}$$

$$(ii)Y_t = C \quad \forall t$$

$$r > \frac{C-NC}{D-C} \Rightarrow \qquad Y_0 = D, Y_t = NC \text{ se } t>0$$

$$(i)\exists\tau : Y_t = C \text{ se } t<\tau, Y_\tau = D, Y_t = NC \text{ se } t>\tau$$

$$(ii)Y_t = C \quad \forall t$$

21

## Trigger strategy: equilibrio di Nash

$$r > \frac{C-NC}{D-C} \Rightarrow$$

$$D + dNC + d^2NC + \ldots + d^tNC + \ldots > C + dC + \ldots + d^tC + \ldots$$

$$D + \frac{d}{1-d}NC > \frac{1}{1-d}C \qquad S_t = 1 + d + d^2 + \ldots + d^t$$

$$(1-d)D + dNC > C \qquad (1-d)S_t = 1 - d^{t+1}$$

$$D - C > d(D - NC) \qquad S_t = \frac{1-d^{t+1}}{1-d}$$

$$(1+r)(D-C) > D - NC$$

$$r(D-C) > C - NC \qquad \lim_{t\to\infty} S_t = \frac{1}{1-d}$$

22

# Trigger strategy: equilibrio di Nash

<u>Proposizione 6.1.</u> *La* trigger strategy *sostiene un equilibrio di Nash in cui entrambi i giocatori colludono se e solo se* $r \leq (C - NC)/(D - C)$.

<u>Dimostrazione.</u> Basta notare che se entrambi i giocatori seguono la *trigger strategy* e $r \leq (C - NC)/(D - C)$, nessuno dei due è interessato a cambiare la propria strategia. Al contrario, se entrambi i giocatori seguono la *trigger strategy* e $r > (C - NC)/(D - C)$, ciascuno dei due è interessato a cambiare la propria strategia. ❑

23

# Il dilemma del prigioniero ripetuto un numero di volte finito ma non certo

- Dal valore attuale al valore atteso (o speranza matematica).
- Il caso della probabilità di ripetizione costante nel tempo.
- $$\frac{p}{1+r} = \frac{1}{1+R}$$
  $$(r <)R = \frac{1+r-p}{p} \leq \ ...$$

24

# Collusione

**Assunzione 1: Numero di imprese**. *$I = \{1,2\}$ è l'insieme finito delle imprese concorrenti all'interno del mercato considerato.*

**Assunzione 2: Prodotti omogenei**. *Ogni impresa $i \in I$ produce un unico bene; i beni prodotti dalle imprese in $I$ sono tra loro omogenei.*

**Assunzione 3: Domanda di mercato**. *Le preferenze dei consumatori determinano la funzione di domanda $Q = D(p)$, dove $Q$ è la quantità domandata dal mercato e $p$ è il prezzo di domanda, dotata delle seguenti caratteristiche tecniche. Esiste $\overline{p} > 0$ tale che:*

*$D(p)$ è definita e continua nell'intervallo $p \in \mathbb{R}_+$;*

*$D(p) = 0$ per $p \geq \overline{p}$;*

*$D(p) > 0, \ \forall p \in (0, \overline{p})$;*

*$D(p)$ è derivabile due volte in $(0, \overline{p})$ con derivate continue (in tale intervallo la funzione $D(p)$ è quindi di classe $C^2$), dove $D'(p) = \partial D(p)/\partial p < 0$ e $D''(p) = \partial^2 D(p)/\partial p^2 \leq 0$.*

25

# Collusione

**Assunzione 4: Costi**. *I costi di produzione che l'impresa $i \in I$ deve sostenere sono definiti dalla funzione $C(q_i, k_i)$, dove $q_i$ è la quantità prodotta e venduta dalla generica impresa $i$, mentre $k_i$ è la sua capacità produttiva:*

$$C(q_i, k_i) = \begin{cases} F + rk_i + cq_i & \text{se} \quad 0 \leq q_i \leq k_i \\ \\ \infty & \text{se} \quad q_i > k_i \end{cases}$$

**Assunzione 6: Dimensione delle imprese**. *Ogni impresa $i$ possiede una capacità produttiva $k_i$: $k_i \geq D(c)$.*

~~**Assunzione 7: Struttura temporale**. *Al tempo $t_0$ le imprese in $I$ scelgono simultaneamente i prezzi di offerta.*~~

~~**Assunzione 8: Strategie**. *La variabile strategica impiegata dalla generica impresa $i \in I$ consiste nella scelta del prezzo di vendita del bene prodotto $p_i$: $p_i \in [c, \overline{p}]$.*~~

26

# Collusione

**Assunzione 20: Struttura temporale**. *Ad ogni tempo* $t \in \mathbb{N}_0$ *le imprese in I scelgono simultaneamente i prezzi di offerta che saranno adottati in quel tempo.*

**Assunzione 21: Strategie**. *Una strategia della generica impresa* $i \in I$ *è un elemento del prodotto cartesiano* $\Theta_i = [c, \overline{p}] \times \mathbb{P}_i^{\mathbb{F}_0} \times \mathbb{P}_i^{\mathbb{F}_1} \times \ldots \times \mathbb{P}_i^{\mathbb{F}_t} \times \ldots$, *lo spazio strategico, dove:*

– $\mathbb{E}_t = [c, \overline{p}] \times [c, \overline{p}]$ *è l'insieme dei prezzi adottati dalle imprese al tempo t;*

– $\mathbb{F}_0 = \mathbb{E}_0$; $\mathbb{F}_t = \mathbb{E}_0 \times \mathbb{E}_1 \times \ldots \times \mathbb{E}_t$ *;*

– $\mathbb{P}_i^{\mathbb{F}_t} = \{ \mathrm{p}_i^{F_t} : \mathbb{F}_t \to [c, \overline{p}] \}$ *è l'insieme delle funzioni il cui dominio e codominio sono, rispettivamente,* $\mathbb{F}_t$ *e* $[c, \overline{p}]$.

27

# Il modello di Bertrand come dilemma del prigioniero

| | | *B* | |
|---|---|---|---|
| | | $b_C$ | $b_{NC}$ |
| *A* | $a_C$ | *C* *C* | *ND* *D* |
| | $a_{NC}$ | *D* *ND* | *NC* *NC* |

$$D \approx \Pi_m > C = \frac{\Pi_m}{2} > NC = 0 = ND$$

28

# Il modello di Bertrand come gioco costituente di un gioco ripetuto

$$D \approx \Pi_m > C = \frac{\Pi_m}{2} > NC = 0 = ND$$

$$r \leq \frac{C - NC}{D - C} \approx 1$$

29

# Il modello di Cournot come dilemma del prigioniero

$$p = a - b\left(q_1 + q_2\right)$$

| | | $b_C$ | | $b_{NC}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $a_C$ | $C$ | $C$ | $ND$ | $D$ |
| | $a_{NC}$ | $D$ | $ND$ | $NC$ | $NC$ |

$$D = \frac{9(a-c)^2}{64b} > C = \frac{(a-c)^2}{8b} > NC = \frac{(a-c)^2}{9b} > ND = \frac{3(a-c)^2}{32b}$$

30

# Il modello di Cournot come gioco costituente di un gioco ripetuto : C

$$\Pi_m = [a - c - bq]q, \qquad -bq + a - c - bq = 0$$

$$q_m = \frac{a-c}{2b}, \qquad q_C = \frac{q_m}{2} = \frac{a-c}{4b}$$

$$p_C = a - b\frac{a-c}{2b} = \frac{a+c}{2}$$

$$C = (p_C - c)q_C = \frac{(a-c)^2}{8b}$$

31

# Il modello di Cournot come gioco costituente di un gioco ripetuto: NC

$$\Pi_i = \left[a - c - b(q_1 + q_2)\right]q_i$$

$$-bq_i + a - c - b(q_1 + q_2) = 0$$

$$q_{NC} = \frac{a-c}{3b}, \quad p_{NC} = a - b\frac{2(a-c)}{3b} = \frac{a+2c}{3}$$

$$NC = (p_{NC} - c)q_{NC} = \frac{(a-c)^2}{9b}$$

32

## Il modello di Cournot come gioco costituente di un gioco ripetuto: D

$$q_{ND} = q_C = \frac{a-c}{4b}$$

$$\Pi_D = \left[a - b\left(q_{ND} + q_D\right)\right]q_D - cq_D$$

$$-bq_D + a - c - b\left(q_{ND} + q_D\right) = 0$$

$$q_D = \frac{a - c - bq_{ND}}{2b} = \frac{3\left(a-c\right)}{8b}$$

33

## Il modello di Cournot come gioco costituente di un gioco ripetuto: D

$$q_{ND} = q_C = \frac{a-c}{4b} \qquad q_D = \frac{3\left(a-c\right)}{8b}$$

$$p_D = p_{ND} = a - b\left[\frac{a-c}{4b} + \frac{3\left(a-c\right)}{8b}\right] = \frac{3a+5c}{8}$$

$$D = \left(p_D - c\right)q_D = \frac{9\left(a-c\right)^2}{64b}$$

34

## Il modello di Cournot come gioco costituente di un gioco ripetuto: ND

$$q_{ND} = \frac{a-c}{4b}$$

$$p_D = p_{ND} = \frac{3a+5c}{8}$$

$$ND = \left(p_{ND} - c\right) q_{ND} = \frac{3\left(a-c\right)^2}{32b}$$

35

## Il modello di Cournot come gioco costituente di un gioco ripetuto

$$D = \frac{9\left(a-c\right)^2}{64b} > C = \frac{\left(a-c\right)^2}{8b} > NC = \frac{\left(a-c\right)^2}{9b} > ND = \frac{3\left(a-c\right)^2}{32b}$$

$$r \le \frac{C-NC}{D-C} = \frac{64}{72} = \frac{8}{9}$$

$$\frac{\frac{1}{8} - \frac{1}{9}}{\frac{9}{64} - \frac{1}{8}} = \frac{\frac{1}{72}}{\frac{1}{64}}$$

36

# Grado di collusione

- Irrilevante quando il gioco costituente è il modello di Bertrand.

$$D \approx \Pi_m > C = \alpha \frac{\Pi_m}{2} > NC = 0 = ND$$

$$r \leq \frac{C - NC}{D - C} \approx \frac{\alpha}{2 - \alpha} < 1$$

37

# Grado di collusione

- Studiamo il caso in cui il gioco costituente è il modello di Cournot con funzione di domanda lineare:

$$p = a - b(q_1 + q_2)$$

38

## Grado di collusione quando il gioco costituente è il modello di Cournot: C

$$\Pi_m = [a - c - bq]q, \qquad -bq + a - c - bq = 0$$

$$q_m = \frac{a-c}{2b}, \qquad q_C = \frac{q_m}{2\alpha} = \frac{a-c}{4\alpha b} \qquad (\alpha \leq 1)$$

$$p_C = a - b\frac{a-c}{2\alpha b} = \frac{(2\alpha - 1)a + c}{2\alpha}$$

$$C = (p_C - c)q_C = \frac{(2\alpha - 1)(a-c)^2}{8\alpha^2 b}$$

39

## Grado di collusione quando il gioco costituente è il modello di Cournot: NC

$$\Pi_i = [a - c - b(q_1 + q_2)]q_i$$

$$-bq_i + a - c - b(q_1 + q_2) = 0$$

$$q_{NC} = \frac{a-c}{3b}, \quad p_{NC} = a - b\frac{2(a-c)}{3b} = \frac{a+2c}{3}$$

$$NC = (p_{NC} - c)q_{NC} = \frac{(a-c)^2}{9b} \qquad \left(\alpha \geq \frac{3}{4}\right)$$

40

## Grado di collusione quando il gioco costituente è il modello di Cournot: NC

$$C = \frac{(2\alpha - 1)(a-c)^2}{8\alpha^2 b} \ , \quad NC = \frac{(a-c)^2}{9b}$$

$$\frac{(2\alpha - 1)}{8\alpha^2} \geq \frac{1}{9} \ , \quad 8\alpha^2 - 18\alpha + 9 \leq 0$$

$$\frac{3}{4} \leq \alpha \leq \frac{3}{2}$$

41

## Grado di collusione quando il gioco costituente è il modello di Cournot: D

$$q_{ND} = q_C = \frac{a-c}{4\alpha b}$$

$$\Pi_D = \left[a - b\left(q_{ND} + q_D\right)\right] q_D - c q_D$$

$$-b q_D + a - c - b\left(q_{ND} + q_D\right) = 0$$

$$q_D = \frac{a - c - b q_{ND}}{2b} = \frac{(4\alpha - 1)(a-c)}{8\alpha b}$$

42

## Grado di collusione quando il gioco costituente è il modello di Cournot: D

$$q_{ND} = q_C = \frac{a-c}{4\alpha b}$$

$$q_D = \frac{(4\alpha-1)(a-c)}{8\alpha b}$$

$$p_D = p_{ND} = a - b\left[\frac{a-c}{4\alpha b} + \frac{(4\alpha-1)(a-c)}{8\alpha b}\right] =$$

43

## Grado di collusione quando il gioco costituente è il modello di Cournot: D

$$q_{ND} = \frac{a-c}{4\alpha b}, q_D = \frac{(4\alpha-1)(a-c)}{8\alpha b}$$

$$p_D = p_{ND} = a - b\frac{(4\alpha+1)(a-c)}{8\alpha b} =$$

$$= \frac{(4\alpha-1)a + (4\alpha+1)c}{8\alpha}$$

$$D = (p_D - c)q_D = \frac{(4\alpha-1)^2(a-c)^2}{64\alpha^2 b}$$

44

## Grado di collusione quando il gioco costituente è il modello di Cournot: ND

$$q_{ND} = \frac{a-c}{4\alpha b}$$

$$p_D = p_{ND} = \frac{(4\alpha-1)a+(4\alpha+1)c}{8\alpha}$$

$$ND = \left(p_{ND}-c\right)q_{ND} = \frac{(4\alpha-1)(a-c)^2}{32\alpha^2 b}$$

45

## Grado di collusione quando il gioco costituente è il modello di Cournot

$$D > C > NC > ND$$

$$D = \frac{(4\alpha-1)^2(a-c)^2}{64\alpha^2 b}, \quad C = \frac{(2\alpha-1)(a-c)^2}{8\alpha^2 b}$$

$$NC = \frac{(a-c)^2}{9b}, \qquad ND = \frac{(4\alpha-1)(a-c)^2}{32\alpha^2 b}$$

$$\frac{(4\alpha-1)^2}{64\alpha^2} > \frac{2\alpha-1}{8\alpha^2} > \frac{1}{9} > \frac{4\alpha-1}{32\alpha^2}$$

46

## Grado di collusione quando il gioco costituente è il modello di Cournot

$$9(4\alpha-1)^2 > 72(2\alpha-1) > 64\alpha^2 > 18(4\alpha-1)$$

$$9\left(4\tfrac{3}{4}-1\right)^2 = 72\left(2\tfrac{3}{4}-1\right) = 64\left[\tfrac{3}{4}\right]^2 = 18\left(4\tfrac{3}{4}-1\right)$$

$$\boxed{\frac{(4\alpha-1)^2}{64\alpha^2} > \frac{2\alpha-1}{8\alpha^2} > \frac{1}{9} > \frac{4\alpha-1}{32\alpha^2}}$$

47

## Grado di collusione quando il gioco costituente è il modello di Cournot

$$\boxed{9(4\alpha-1)^2 > 72(2\alpha-1) > 64\alpha^2 > 18(4\alpha-1)}$$

$$72(4\alpha-1) > 144 > 128\alpha > 72$$

48

# Grado di collusione quando il gioco costituente è il modello di Cournot

$$D = \frac{(4\alpha-1)^2(a-c)^2}{64\alpha^2 b}, \quad C = \frac{(2\alpha-1)(a-c)^2}{8\alpha^2 b}$$

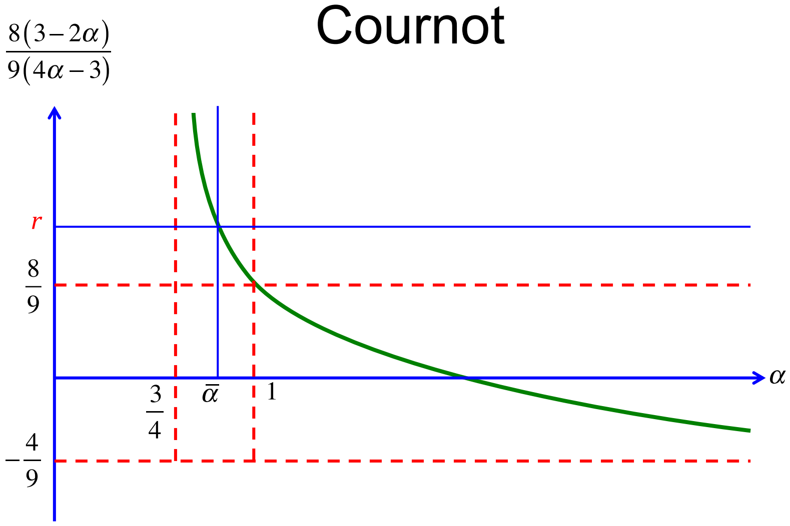
$$NC = \frac{(a-c)^2}{9b}, \qquad ND = \frac{(4\alpha-1)(a-c)^2}{32\alpha^2 b}$$

$$r \le \frac{C-NC}{D-C} = \frac{\frac{2\alpha-1}{8\alpha^2} - \frac{1}{9}}{\frac{(4\alpha-1)^2}{64\alpha^2} - \frac{2\alpha-1}{8\alpha^2}} = \frac{72(2\alpha-1)-64\alpha^2}{9(4\alpha-1)^2 - 72(2\alpha-1)}$$

$$= \frac{144\alpha - 72 - 64\alpha^2}{144\alpha^2 - 216\alpha + 81} = \frac{8(3-2\alpha)(4\alpha-3)}{9(4\alpha-3)^2} = \frac{8(3-2\alpha)}{9(4\alpha-3)}$$

49

# Grado di collusione quando il gioco costituente è il modello di Cournot




50