Lezione 30/4/24

- Discriminazione di prezzo: secondo grado (documento nel sito di e-learning dal titolo Discriminazione di secondo grado).
- Discriminazione di prezzo: altre forme di selezione dei consumatori (Cabral, Capitolo 6, pp. 164-169).
- Discriminazione di prezzo e autorità anti-trust (Cabral, Capitolo 6, pp. 178-183).

1

Prossime lezioni

- La prossima lezione si svolgerà il 7 maggio alle ore 14:00 in aula P1.
- Le lezioni dell'8 e del 10 maggio non saranno tenute.
- La lezione successiva si svolgerà martedì 14 maggio alle ore 14:00 in aula Q1.

2

Recupero

Buonasera professore, le volevo chiedere un chiarimento su un punto particolare del gioco varietà-prezzo.

Quando viene introdotto il concetto di consumatore marginale t*, indichiamo colui che è indifferente se comprare x1 o x2 lungo il segmento di Hotelling, dato che esso viene indicato come punto di intersezione delle due curve di domanda dei due beni.

Possiamo dire che tutti i consumatori alla sua sinistra comprano x1 e tutti quelli alla sua destra comprano x2? Questo vale anche se i prezzi non sono uguali? Nella situazione di prezzi diversi influiscono di molto la distanza tra consumatore marginale e bene più vicino/lontano da esso e l'eventuale costo opportunità che il consumatore sostiene acquistando il bene?

Grazie in anticipo, buona serata.

3

Il gioco varietà-prezzo

Assunzione 13: Preferenze e costi dei consumatori. *Nel mercato esiste un numero infinito di beni ideali merceologicamente omogenei tra loro, ma diversi per la collocazione ove sono disponibili lungo un segmento di lunghezza unitaria,* $[0,1]$. *Nel mercato esiste un numero infinito di consumatori distribuito uniformemente lungo il segmento* $[0,1]$*: per ogni punto t di questo segmento esiste un consumatore t che preferisce esattamente la varietà t del bene. Ciascun consumatore acquista una singola unità del bene. Il consumatore t che acquista la qualità* θ *del bene al prezzo p, sopporta un costo complessivo per l'acquisto del bene pari a* $p + b(\theta - t)^2$ *con* $b > 0$.

Assunzione 14: Prodotti differenziati. *Ogni impresa* $i \in I$ *produce un unico bene, ossia ha un'unica collocazione,* x_i*, sul segmento* $[0,1]$*; senza perdita di generalità,* $0 \le x_1 \le x_2 \le 1$.

4

Il gioco varietà-prezzo

Assunzione 15: Struttura temporale. *La concorrenza tra le imprese si realizza in due stadi successivi:*

– nel primo stadio (t_0), le imprese in I scelgono, simultaneamente e indipendentemente, la varietà del prodotto (la collocazione) desiderata;

– nel secondo stadio (t_1), le imprese in I, dopo essere venute a conoscenza della varietà (collocazione) adottata dalle imprese in I, scelgono, simultaneamente e indipendentemente, i prezzi di offerta.

Assunzione 16: Strategie. *Una strategia della generica impresa $i \in I$ è un elemento del prodotto cartesiano $\Upsilon_i = \mathbb{X}_i \times \mathbb{P}_i^{\mathbb{X}}$, lo spazio strategico, dove:*

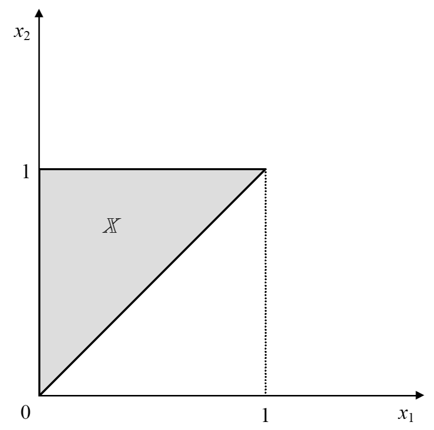
– $\mathbb{X}_i$ è l'insieme delle varietà adottabili dall'impresa i nel primo stadio del gioco ($\mathbb{X}_1 = [0, x_2]$ e $\mathbb{X}_2 = [0,1]$); e

– $\mathbb{P}_i^{\mathbb{X}} = \{\mathrm{p}_i^x : \mathbb{X} \to \mathbb{P}_i\}$ è l'insieme delle funzioni il cui dominio e codominio sono, rispettivamente, $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2$ e $\mathbb{P}_i = [c, \infty]$.

5

Il gioco varietà-prezzo

Figura 5.2. – *L'insieme* $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2$



6

Il gioco varietà-prezzo

L'Assunzione 1 definisce l'*insieme finito dei giocatori*. Le Assunzioni 15 e 16 definiscono lo *spazio strategico* di ciascuna impresa i, $\Upsilon_i = \mathbb{X}_i \times \mathbb{P}_i^{\mathbb{X}}$. Ad ogni coppia di strategie, una per l'impresa 1 ed una per l'impresa 2, è associato un vettore nonnegativo $(x_1, x_2) \in \mathbb{X}$ ed un vettore nonnegativo $(p_1, p_2) \in \mathbb{P}$.

Dobbiamo chiarire che le assunzioni 4-6 e 13-14 sono in grado di determinare il profitto delle imprese, ossia gli esiti (payoff) dei giocatori.

7

Il gioco varietà-prezzo: domanda

Se $x_1 = x_2$, allora:

$$D_i\left(p_i, p_j\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } x_i = x_j \text{ e } p_i > p_j \\ \frac{1}{2} & \text{se } x_i = x_j \text{ e } p_i = p_j \\ 1 & \text{se } x_i = x_j \text{ e } p_i < p_j \end{cases}$$

8

Il gioco varietà-prezzo: domanda

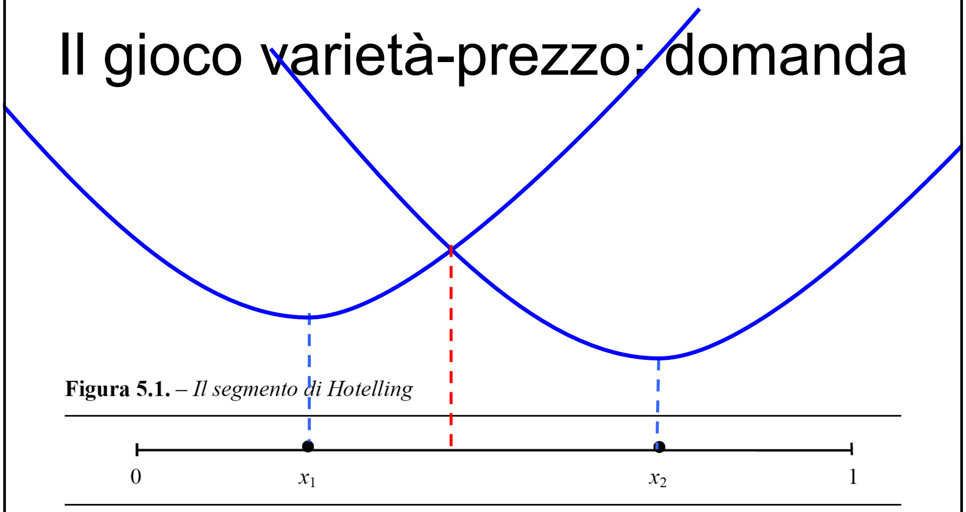


Figura 5.1. – *Il segmento di Hotelling*

9

Il gioco varietà-prezzo: domanda

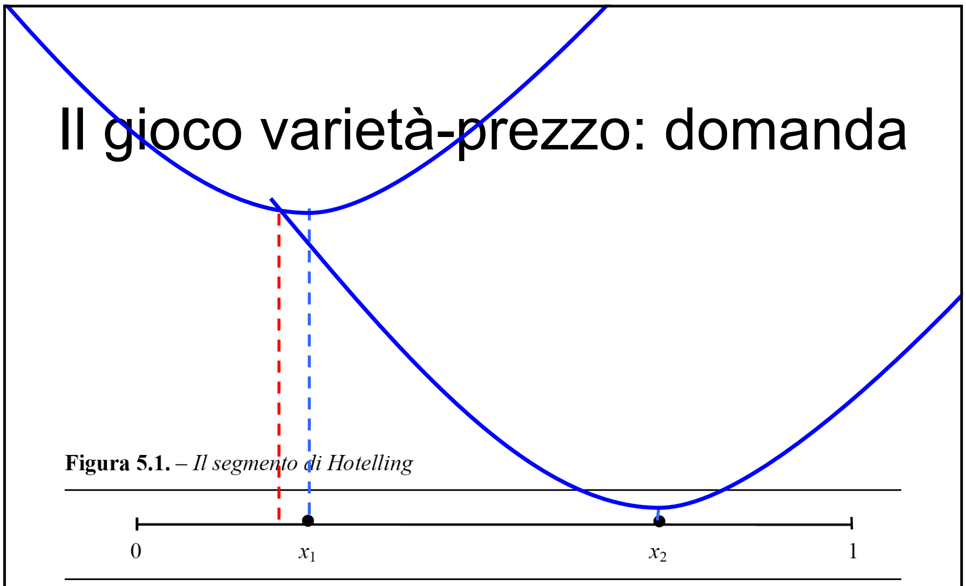
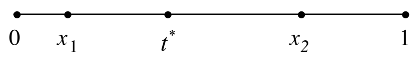


Figura 5.1. – *Il segmento di Hotelling*

10

Il gioco varietà-prezzo: domanda



$$p_1 + b\left(x_1 - t\right)^2 = p_2 + b\left(x_2 - t\right)^2$$

$$p_1 + b\left(x_1^2 - 2x_1 t + t^2\right) = p_2 + b\left(x_2^2 - 2x_2 t + t^2\right)$$

$$p_1 + b\left(x_1^2 - 2x_1 t\right) = p_2 + b\left(x_2^2 - 2x_2 t\right)$$

11

Il gioco varietà-prezzo: domanda

$$2b\left(x_2 - x_1\right)t = p_2 - p_1 + b\left(x_2^2 - x_1^2\right)$$

$$t^* = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{p_2 - p_1}{2b\left(x_2 - x_1\right)}$$

$$\boxed{p_1 + b\left(x_1^2 - 2x_1 t\right) = p_2 + b\left(x_2^2 - 2x_2 t\right)}$$

12

Il gioco varietà-prezzo: domanda

$$0 \le \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{p_2 - p_1}{2b(x_2 - x_1)} \le 1$$

$$\boxed{t^* = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{p_2 - p_1}{2b(x_2 - x_1)}}$$

$$0 \le t^* \le 1$$

13

Il gioco varietà-prezzo: domanda

$$\boxed{0 \le \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{p_2 - p_1}{2b(x_2 - x_1)} \le 1}$$

$$0 \le b\left(x_2^2 - x_1^2\right) + p_2 - p_1 \le 2b(x_2 - x_1)$$

$$p_1 - p_2 \le b\left(x_2^2 - x_1^2\right)$$

$$b(x_2 - x_1)(2 - x_1 - x_2) \ge p_2 - p_1$$

14

Il gioco varietà-prezzo: domanda

$$D_1\left(x_1,x_2,p_1,p_2\right)=\min\left\{1,\max\left\{0,\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{p_2-p_1}{2b\left(x_2-x_1\right)}\right\}\right\}=$$

$$=\begin{cases}0 & \text{se } p_1>p_2+b\left(x_2^2-x_1^2\right)\\ \dfrac{x_1+x_2}{2}+\dfrac{p_2-p_1}{2b\left(x_2-x_1\right)} & \text{se } \max\left\{0,p_2-b\left(x_2-x_1\right)\left(2-x_1-x_2\right)\right\}\le p_1\le p_2+b\left(x_2^2-x_1^2\right)\\ 1 & \text{se } 0\le p_1<p_2-b\left(x_2-x_1\right)\left(2-x_1-x_2\right)\end{cases}$$

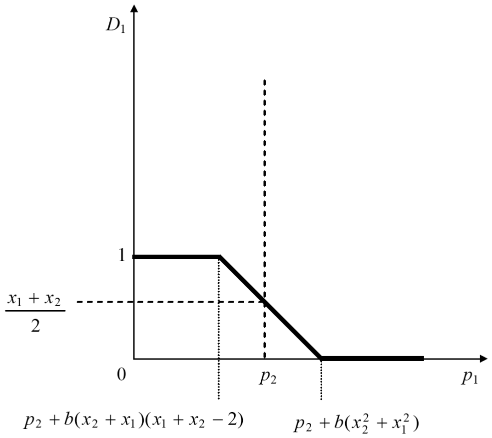
$$D_2\left(x_1,x_2,p_1,p_2\right)=\min\left\{1,\max\left\{0,1-\frac{x_1+x_2}{2}-\frac{p_2-p_1}{2b\left(x_2-x_1\right)}\right\}\right\}=$$

$$=\begin{cases}0 & \text{se } p_2>p_1+b\left(x_2-x_1\right)\left(2-x_1-x_2\right)\\ 1-\dfrac{x_1+x_2}{2}-\dfrac{p_2-p_1}{2b\left(x_2-x_1\right)} & \text{se } \max\left\{0,p_1-b\left(x_2^2-x_1^2\right)\right\}\le p_2\le p_1+b\left(x_2-x_1\right)\left(2-x_1-x_2\right)\\ 1 & \text{se } 0\le p_2<p_1-b\left(x_2^2-x_1^2\right)\end{cases}$$

15

Il gioco varietà-prezzo: domanda

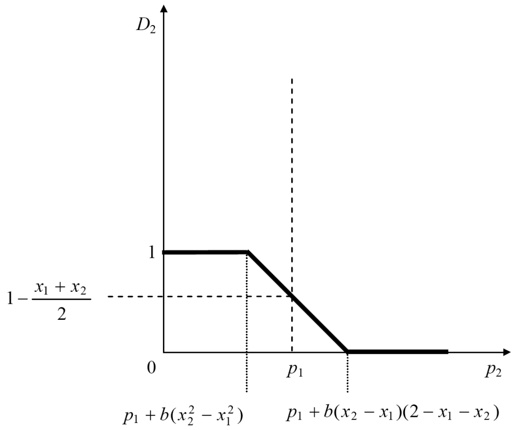
Figura 5.3. – *La domanda del bene x_1 come funzione di p_1, considerando dati x_1, x_2, e p_2*



16

Il gioco varietà-prezzo: domanda

Figura 5.4. – *La domanda del bene x_2 come funzione di p_2, considerando dati x_1, x_2, e p_1*



17

Il gioco varietà-prezzo: profitto

$$\pi_1(x_1,x_2,p_1,p_2) = (p_1 - c)\max\left\{0, \min\left\{1, \frac{x_1+x_2}{2} + \frac{p_2 - p_1}{2b(x_2 - x_1)}\right\}\right\} =$$

$$= \begin{cases} (p_1 - c) & \text{se } c \le p_1 \le \max\left\{c, p_2 - b(x_2 - x_1)(2 - x_1 - x_2)\right\} \\ (p_1 - c)\left[\frac{x_1+x_2}{2} + \frac{p_2 - p_1}{2b(x_2 - x_1)}\right] & \text{se } \max\left\{c, p_2 - b(x_2 - x_1)(2 - x_1 - x_2)\right\} \le p_1 \le p_2 + b(x_2^2 - x_1^2) \\ 0 & \text{se } p_1 \ge p_2 + b(x_2^2 - x_1^2) \end{cases}$$

$$\pi_2(x_1,x_2,p_1,p_2) = (p_2 - c)\max\left\{0, \min\left\{1, 1 - \frac{x_1+x_2}{2} - \frac{p_2 - p_1}{2b(x_2 - x_1)}\right\}\right\} =$$

$$= \begin{cases} (p_2 - c) & \text{se } c \le p_2 \le \max\left\{c, p_1 - b(x_2^2 - x_1^2)\right\} \\ (p_2 - c)\left[1 - \frac{x_1+x_2}{2} - \frac{p_2 - p_1}{2b(x_2 - x_1)}\right] & \text{se } \max\left\{c, p_1 - b(x_2^2 - x_1^2)\right\} \le p_2 \le p_1 + b(x_2 - x_1)(2 - x_1 - x_2) \\ 0 & \text{se } p_2 \ge p_1 + b(x_2 - x_1)(2 - x_1 - x_2) \end{cases}$$

18

Il gioco varietà-prezzo: profitto

Cosa accade se $x_1 = x_2 = x$?

$$\pi_1(x_1,x_2,p_1,p_2) = (p_1 - c)\max\left\{0, \min\left\{1, \frac{x_1+x_2}{2} + \frac{p_2 - p_1}{2b(x_2 - x_1)}\right\}\right\} =$$

$$= \begin{cases} (p_1 - c) & \text{se } c \le p_1 \le \max\{c, p_2 - b(x_2 - x_1)(2 - x_1 - x_2)\} \\ (p_1 - c)\left[\frac{x_1+x_2}{2} + \frac{p_2 - p_1}{2b(x_2 - x_1)}\right] & \text{se } \max\{c, p_2 - b(x_2 - x_1)(2 - x_1 - x_2)\} \le p_1 \le p_2 + b(x_2^2 - x_1^2) \\ 0 & \text{se } p_1 \ge p_2 + b(x_2^2 - x_1^2) \end{cases}$$

$$\pi_1(x,x,p_1,p_2) = (p_1 - c)\max\left\{0, \min\left\{1, x + \frac{p_2 - p_1}{0}\right\}\right\} =$$

$$= \begin{cases} (p_1 - c) & \text{se } c \le p_1 < \max\{c, p_2\} \\ (p_1 - c)\left[x + \frac{0}{0}\right] & \text{se } \max\{c, p_2\} \le p_1 \le p_2 \\ 0 & \text{se } p_1 > p_2 \end{cases}$$

19

Il gioco varietà-prezzo: profitto

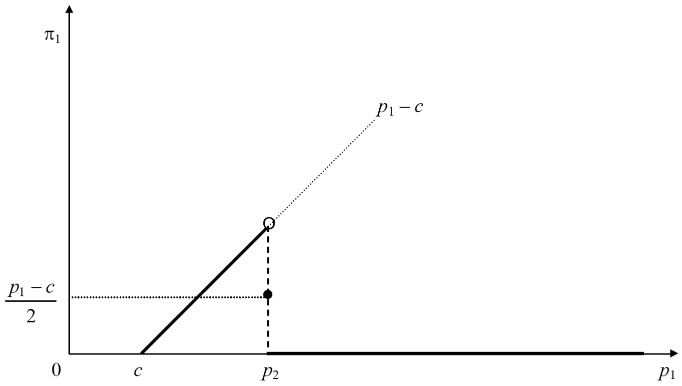
Se $x_1 = x_2$, allora:

$$\pi_i(p_i, p_j) = \begin{cases} p_i - c & \text{se } p_i < p_j \\ \frac{p_j - c}{2} & \text{se } p_i = p_j \\ 0 & \text{se } p_i > p_j \end{cases}$$

20

Il gioco varietà-prezzo: profitto

Figura 5.6. – *La funzione del profitto dell'impresa 1 come funzione di p_1, considerando dati $x_1 = x_2$ e p_2.*



21

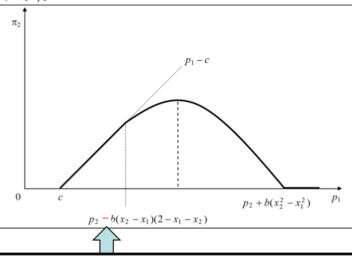
Il gioco varietà-prezzo: profitto

Supponiamo $x_1 < x_2$

$$\pi_1(x_1, x_2, p_1, p_2) = (p_1 - c)\max\left\{0, \min\left\{1, \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{p_2 - p_1}{2b(x_2 - x_1)}\right\}\right\} =$$

$$= \begin{cases} (p_1 - c) & \text{se } c \le p_1 \le \max\{c, p_2 - b(x_2 - x_1)(2 - x_1 - x_2)\} \\ (p_1 - c)\left[\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{p_2 - p_1}{2b(x_2 - x_1)}\right] & \text{se } \max\{c, p_2 - b(x_2 - x_1)(2 - x_1 - x_2)\} \le p_1 \le p_2 + b(x_2^2 - x_1^2) \\ 0 & \text{se } p_1 \ge p_2 + b(x_2^2 - x_1^2) \end{cases}$$

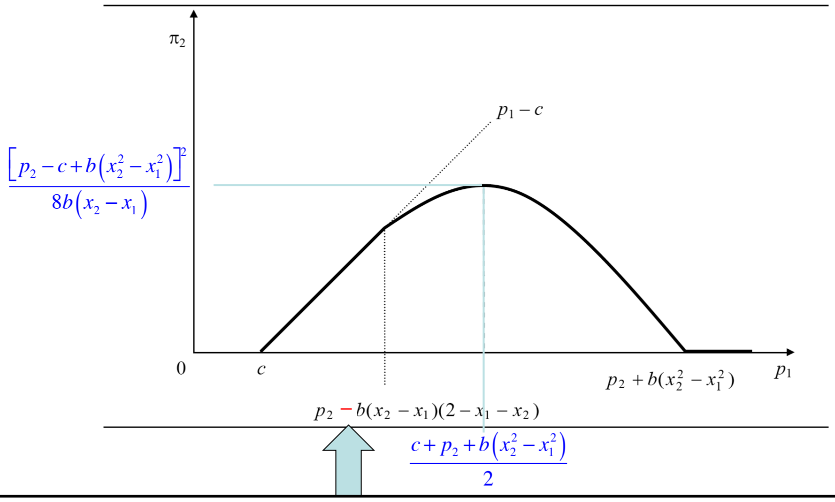
Figura 5.5. – *La funzione del profitto dell'impresa 1 come funzione di p_1, considerando dati $x_1 < x_2$ e p_2*



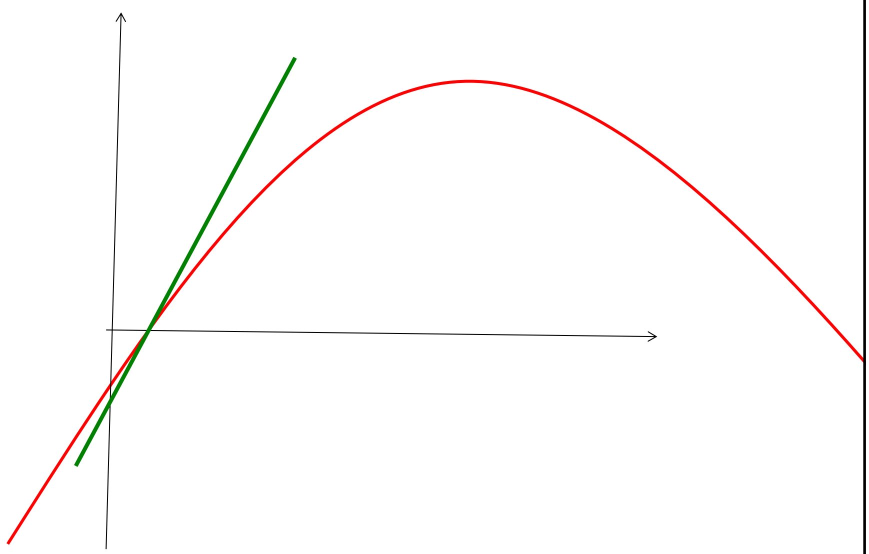
22

Il gioco varietà-prezzo: profitto

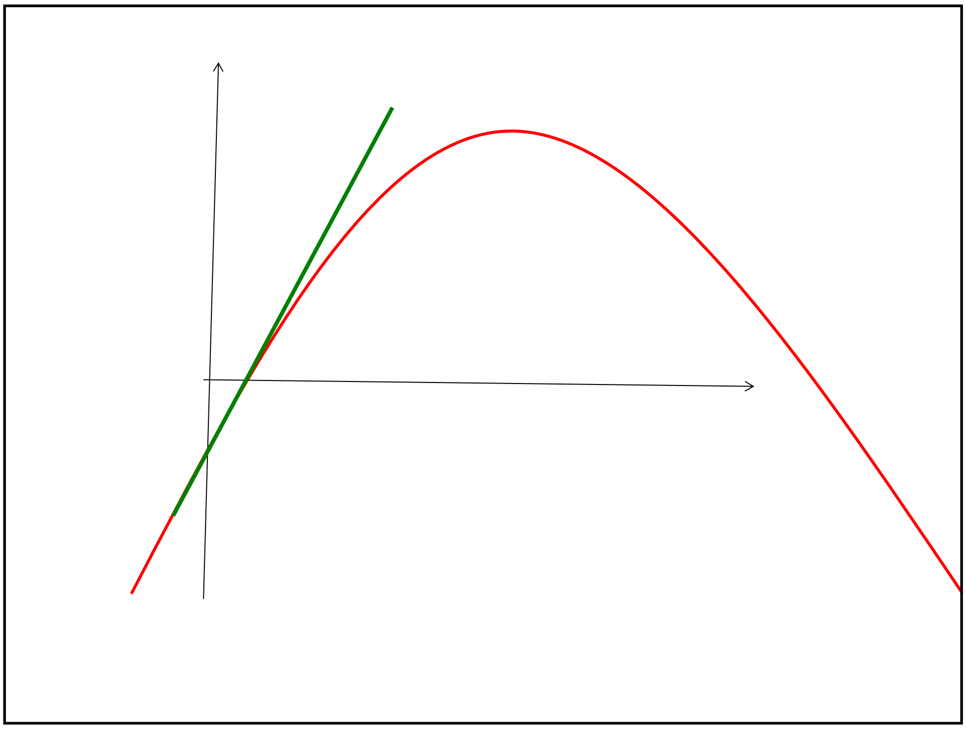
Figura 5.5. – *La funzione del profitto dell'impresa 1 come funzione di p_1, considerando dati $x_1 < x_2$ e p_2*



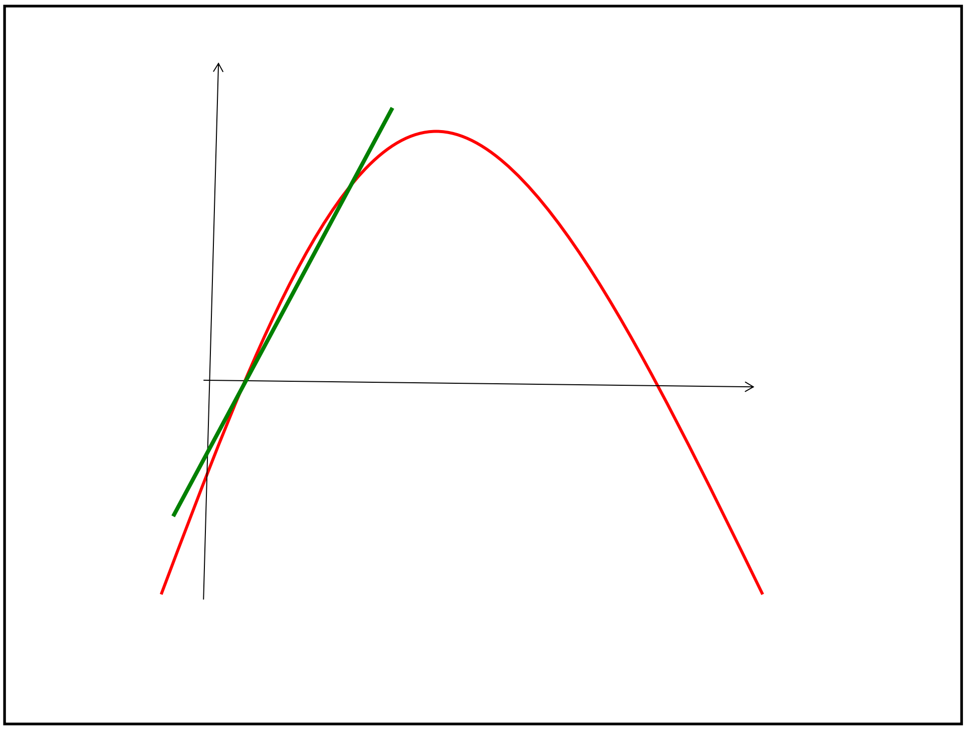
23



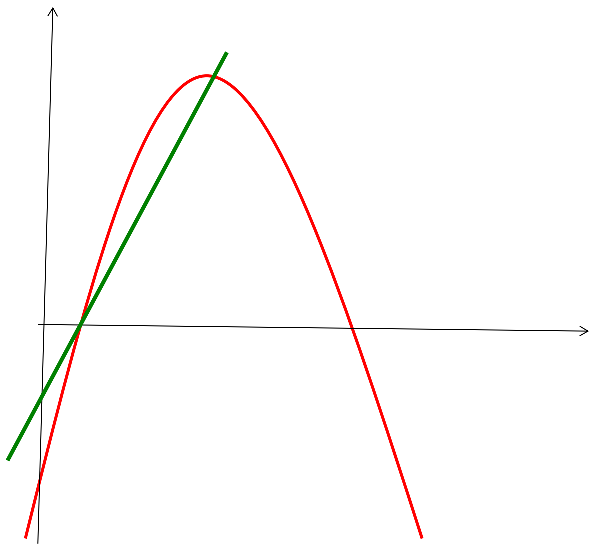
24



25



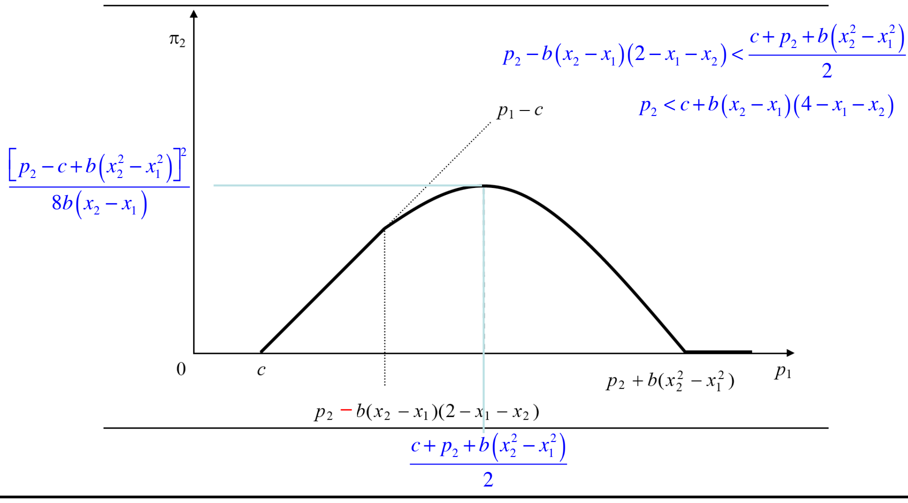
26



27

Il gioco varietà-prezzo: profitto

Figura 5.5. – *La funzione del profitto dell'impresa 1 come funzione di p_1, considerando dati $x_1 < x_2$ e p_2*



28

Il gioco varietà-prezzo: profitto

$$p_2 - b(x_2 - x_1)(2 - x_1 - x_2) < \frac{c + p_2 + b(x_2^2 - x_1^2)}{2}$$

$$2p_2 - 2b(x_2 - x_1)(2 - x_1 - x_2) < c + p_2 + b(x_2^2 - x_1^2)$$

$$p_2 < c + b(x_2 - x_1)(4 - 2x_1 - 2x_2 + x_1 + x_2)$$

$$p_2 < c + b(x_2 - x_1)(4 - x_1 - x_2)$$

29

Il gioco varietà-prezzo

Utilizzando il *metodo dell'induzione a ritroso* dimostriamo l'esistenza di un unico *equilibrio di Nash perfetto nei sottogiochi*. Iniziamo con definire i sottogiochi di prezzo. Ciascun sottogioco di prezzo si basa sulle Assunzioni 1, 4-6, 13-14 e sulle assunzioni

A.5.1 x_1 e x_2 ($0 \le x_1 \le x_2 \le 1$) sono dati;

A.5.2 le imprese in I scelgono, simultaneamente e indipendentemente, i prezzi di offerta;

A.5.3 le strategie a disposizione dell'impresa $i \in I$ sono gli elementi dell'insieme $\mathbb{P}_i = [c, \infty]$.

30

Il sottogioco dei prezzi

In un equilibrio di Nash in strategie pure necessariamente entrambe le imprese producono parte del bene.

$$t^* \geq 1 \Rightarrow c \leq p_1 < p_2 - b(x_2 - x_1)(2 - x_1 - x_2)$$

l'impresa 2 ha profitti variabili nulli, mentre potrebbe ottenere profitti variabili positivi scegliendo

$$c < p_2 < c + b(x_2 - x_1)(2 - x_1 - x_2)$$

31

Il sottogioco dei prezzi

In un equilibrio di Nash in strategie pure necessariamente entrambe le imprese producono parte del bene.

$$t^* \leq 0 \Rightarrow c \leq p_2 < p_1 - b(x_2^2 - x_1^2)$$

l'impresa 1 ha profitti variabili nulli, mentre potrebbe ottenere profitti variabili positivi scegliendo

$$c < p_1 < c + b(x_2^2 - x_1^2)$$

32

Il sottogioco dei prezzi

Assumere che il massimo del profitto è nel vertice della parabola significa assumere che:

$$p_2 < b(x_2 - x_1)(4 - x_1 - x_2) + c$$
$$p_1 < b(x_2 - x_1)(2 + x_1 + x_2) + c$$

$$\begin{cases} \max\limits_{p_1} (p_1 - c)\left[\dfrac{x_1 + x_2}{2} + \dfrac{p_2 - p_1}{2b(x_2 - x_1)}\right] \\ \max\limits_{p_2} (p_2 - c)\left[1 - \dfrac{x_1 + x_2}{2} - \dfrac{p_2 - p_1}{2b(x_2 - x_1)}\right] \end{cases}$$

33

Il sottogioco dei prezzi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial p_1}\left\{(p_1 - c)\left[\dfrac{x_1 + x_2}{2} + \dfrac{p_2 - p_1}{2b(x_2 - x_1)}\right]\right\} = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial p_2}\left\{(p_2 - c)\left[1 - \dfrac{x_1 + x_2}{2} - \dfrac{p_2 - p_1}{2b(x_2 - x_1)}\right]\right\} = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} \max\limits_{p_1} (p_1 - c)\left[\dfrac{x_1 + x_2}{2} + \dfrac{p_2 - p_1}{2b(x_2 - x_1)}\right] \\ \max\limits_{p_2} (p_2 - c)\left[1 - \dfrac{x_1 + x_2}{2} - \dfrac{p_2 - p_1}{2b(x_2 - x_1)}\right] \end{cases}}$$

34

Il sottogioco dei prezzi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial p_1}\left\{ (p_1 - c)\left[\dfrac{x_1 + x_2}{2} + \dfrac{p_2 - p_1}{2b(x_2 - x_1)} \right] \right\} = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial p_2}\left\{ (p_2 - c)\left[1 - \dfrac{x_1 + x_2}{2} - \dfrac{p_2 - p_1}{2b(x_2 - x_1)} \right] \right\} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\dfrac{x_1 + x_2}{2} + \dfrac{p_2 - p_1}{2b(x_2 - x_1)} \right] - \dfrac{p_1 - c}{2b(x_2 - x_1)} = 0 \\ \left[1 - \dfrac{x_1 + x_2}{2} - \dfrac{p_2 - p_1}{2b(x_2 - x_1)} \right] - \dfrac{p_2 - c}{2b(x_2 - x_1)} = 0 \end{cases}$$

35

Il sottogioco dei prezzi

$$\begin{cases} \dfrac{x_1 + x_2}{2} + \dfrac{p_2 - 2p_1 + c}{2b(x_2 - x_1)} = 0 \\ 1 - \dfrac{x_1 + x_2}{2} + \dfrac{p_1 - 2p_2 + c}{2b(x_2 - x_1)} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\dfrac{x_1 + x_2}{2} + \dfrac{p_2 - p_1}{2b(x_2 - x_1)} \right] - \dfrac{p_1 - c}{2b(x_2 - x_1)} = 0 \\ \left[1 - \dfrac{x_1 + x_2}{2} - \dfrac{p_2 - p_1}{2b(x_2 - x_1)} \right] - \dfrac{p_2 - c}{2b(x_2 - x_1)} = 0 \end{cases}$$

36

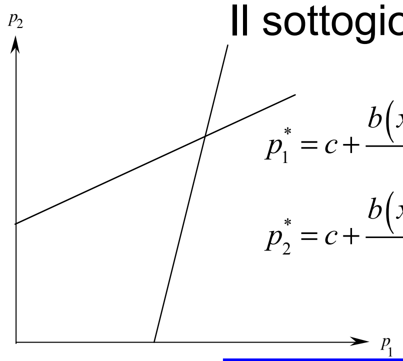
Il sottogioco dei prezzi

$$\begin{cases} \dfrac{x_1+x_2}{2}+\dfrac{p_2-2p_1+c}{2b(x_2-x_1)}=0 \\ 1-\dfrac{x_1+x_2}{2}+\dfrac{p_1-2p_2+c}{2b(x_2-x_1)}=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_1=\dfrac{b(x_2-x_1)(x_1+x_2)+p_2+c}{2} \\ p_2=\dfrac{b(x_2-x_1)(2-x_1-x_2)+p_1+c}{2} \end{cases}$$

37

Il sottogioco dei prezzi



$$p_1^*=c+\frac{b(x_2-x_1)(2+x_1+x_2)}{3}$$

$$p_2^*=c+\frac{b(x_2-x_1)(4-x_1-x_2)}{3}$$

$$\begin{cases} p_1=\dfrac{b(x_2-x_1)(x_1+x_2)+p_2+c}{2} \\ p_2=\dfrac{b(x_2-x_1)(2-x_1-x_2)+p_1+c}{2} \end{cases}$$

38

Il sottogioco dei prezzi

$$\boxed{\begin{aligned} p_1^* &= c + \frac{b(x_2 - x_1)(2 + x_1 + x_2)}{3} \\ p_2^* &= c + \frac{b(x_2 - x_1)(4 - x_1 - x_2)}{3} \end{aligned}}$$

$$p_1 - c = \frac{b(x_2 - x_1)(2 + x_1 + x_2)}{3}$$

$$p_2 - c = \frac{b(x_2 - x_1)(4 - x_1 - x_2)}{3}$$

$$p_2 - p_1 = \frac{2b(x_2 - x_1)(1 - x_1 - x_2)}{3}$$

39

Il sottogioco dei prezzi

$$\pi_1(x_1, x_2, p_1, p_2) = (p_1 - c)\max\left\{0, \min\left\{1, \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{p_2 - p_1}{2b(x_2 - x_1)}\right\}\right\} =$$

$$= \begin{cases} (p_1 - c) & \text{se } c \le p_1 \le \max\{c, p_2 - b(x_2 - x_1)(2 - x_1 - x_2)\} \\ (p_1 - c)\left[\dfrac{x_1 + x_2}{2} + \dfrac{p_2 - p_1}{2b(x_2 - x_1)}\right] & \text{se } \max\{c, p_2 - b(x_2 - x_1)(2 - x_1 - x_2)\} \le p_1 \le p_2 + b(x_2^2 - x_1^2) \\ 0 & \text{se } p_1 \ge p_2 + b(x_2^2 - x_1^2) \end{cases}$$

$$p_1 - c = \frac{b(x_2 - x_1)(2 + x_1 + x_2)}{3}$$

$$p_2 - p_1 = \frac{2b(x_2 - x_1)(1 - x_1 - x_2)}{3}$$

$$\pi_1(x_1, x_2) = \left[\frac{b(x_2 - x_1)(2 + x_1 + x_2)}{3}\right]\left[\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{(x_2 - x_1)(1 - x_1 - x_2)}{3(x_2 - x_1)}\right]$$

40

Il sottogioco dei prezzi

$$\pi_1(x_1,x_2)=\left[\frac{b(x_2-x_1)(2+x_1+x_2)}{3}\right]\left[\frac{3(x_1+x_2)+2(1-x_1-x_2)}{6}\right]$$

$$\pi_1(x_1,x_2)=\frac{b(x_2-x_1)(2+x_1+x_2)^2}{18}$$

$$\pi_2(x_1,x_2)=\frac{b(x_2-x_1)(-4+x_1+x_2)^2}{18}$$

$$\boxed{\pi_1(x_1,x_2)=\left[\frac{b(x_2-x_1)(2+x_1+x_2)}{3}\right]\left[\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{(x_2-x_1)(1-x_1-x_2)}{3(x_2-x_1)}\right]}$$

41

Il sottogioco delle varietà

Possiamo adesso definire il sottogioco delle varietà, che si basa sull'Assunzione 1 e sulle seguenti assunzioni.

A.5.4 Le imprese in *I* scelgono, simultaneamente e indipendentemente, la varietà del prodotto (la collocazione) desiderata nel segmento [0, 1];

A.5.5 Gli insiemi delle strategie a disposizione delle imprese in *I* sono $\mathbb{X}_1=[0,x_2]$ per l'impresa 1 e $\mathbb{X}_2=[0,1]$ per l'impresa 2;

A.5.6 Gli esiti delle imprese in *I* sono definiti dalle funzioni

$$\Pi_1=\frac{b(x_2-x_1)(2+x_1+x_2)^2}{18}-F$$

$$\Pi_2=\frac{b(x_2-x_1)(-4+x_1+x_2)^2}{18}-F$$

42

Il sottogioco delle varietà

$$\pi_1\left(x_1,x_2\right)=\frac{b\left(x_2-x_1\right)(2+x_1+x_2)^2}{18}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\Pi_1\left(x_1,x_2\right)=\frac{b}{18}\left[-\left(2+x_1+x_2\right)^2+2\left(x_2-x_1\right)\left(2+x_1+x_2\right)\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\Pi_1\left(x_1,x_2\right)=\frac{b}{18}\left[-2-3x_1+x_2\right]\left(2+x_1+x_2\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\Pi_1\left(x_1,x_2\right)=-\frac{b}{18}\left(2+3x_1-x_2\right)\left(2+x_1+x_2\right)<0$$

43

Il sottogioco delle varietà

$$\pi_1\left(x_1,x_2\right)=\frac{b\left(x_2-x_1\right)(2+x_1+x_2)^2}{18}$$

$$\pi_2\left(x_1,x_2\right)=\frac{b\left(x_2-x_1\right)\left(-4+x_1+x_2\right)^2}{18}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\Pi_1\left(x_1,x_2\right)=-\frac{b}{18}\left(2+3x_1-x_2\right)\left(2+x_1+x_2\right)<0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\Pi_2\left(x_2,x_1\right)=\frac{b}{18}\left(4+x_1-3x_2\right)\left(4-x_1-x_2\right)>0$$

44

Il sottogioco delle varietà

$$\pi_1(x_1,x_2) = \frac{b(x_2 - x_1)(2 + x_1 + x_2)^2}{18}$$

$$\pi_2(x_1,x_2) = \frac{b(x_2 - x_1)(-4 + x_1 + x_2)^2}{18}$$

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = 1$$

$$\pi_1(x_1,x_2) = \frac{9b}{18} = \frac{b}{2}$$

$$\pi_2(x_1,x_2) = \frac{9b}{18} = \frac{b}{2}$$

45

Il sottogioco delle varietà

$$p_1^* = c + \frac{b(x_2 - x_1)(2 + x_1 + x_2)}{3}$$

$$p_2^* = c + \frac{b(x_2 - x_1)(4 - x_1 - x_2)}{3}$$

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = 1$$

$$p_1^* = c + b$$

$$p_2^* = c + b$$

46

Il sottogioco delle varietà

Proposizione 5.1. *Nel gioco varietà-prezzo esiste un unico equilibrio di Nash in strategie pure perfetto nei sottogiochi:*

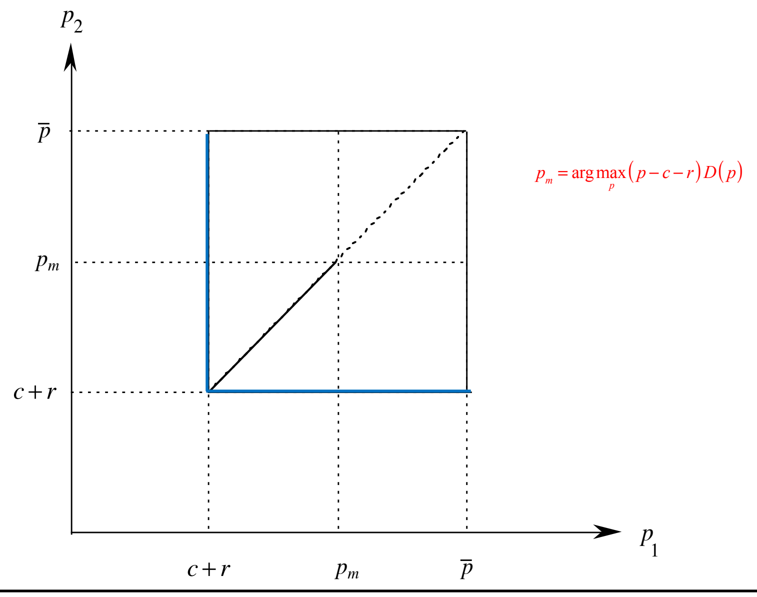
$$\left(x_1^*, x_2^*\right) = (0,1),\ \left(p_1^*, p_2^*\right) = (c+b, c+b)$$

e i profitti di equilibrio delle due imprese sono pari a

$$\Pi_1^* = \Pi_2^* = \frac{b}{2} - F.$$

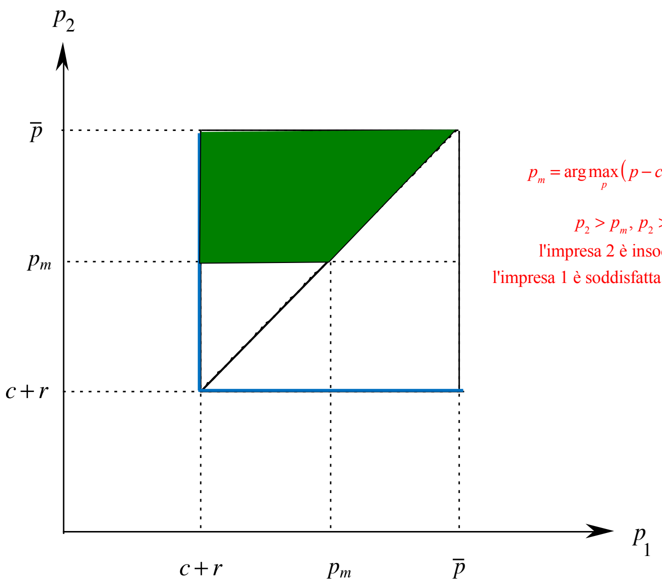
47

Il gioco prezzo-capacità



48

Il gioco prezzo-capacità



$p_m = \arg\max_p (p-c-r)D(p)$

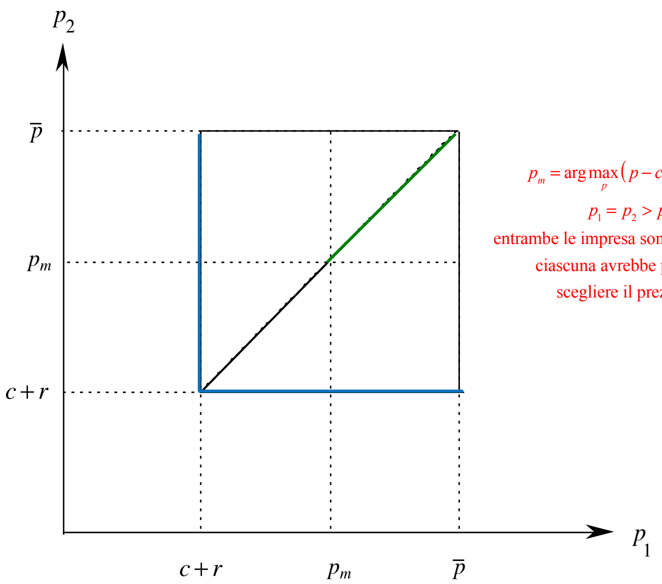
$p_2 > p_m,\ p_2 > p_1$

l'impresa 2 è insoddisfatta

l'impresa 1 è soddisfatta solo se $p_1 = p_m$

49

Il gioco prezzo-capacità



$p_m = \arg\max_p (p-c-r)D(p)$

$p_1 = p_2 > p_m$

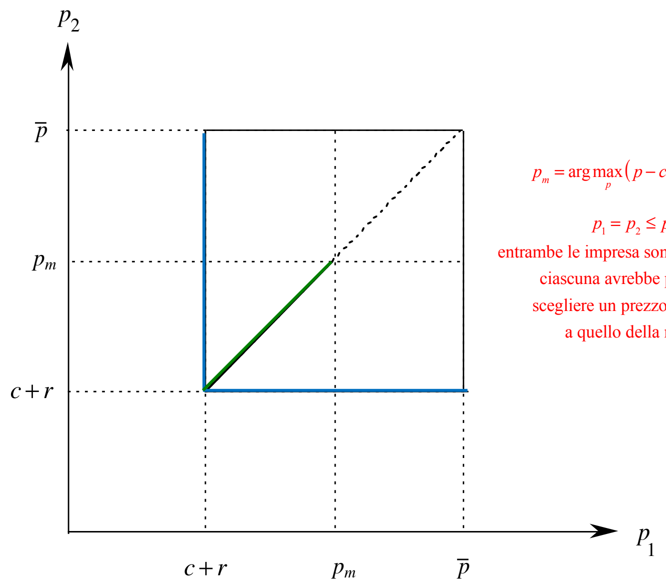
entrambe le impresa sono insoddisfatte

ciascuna avrebbe preferito

scegliere il prezzo p_m

50

Il gioco prezzo-capacità



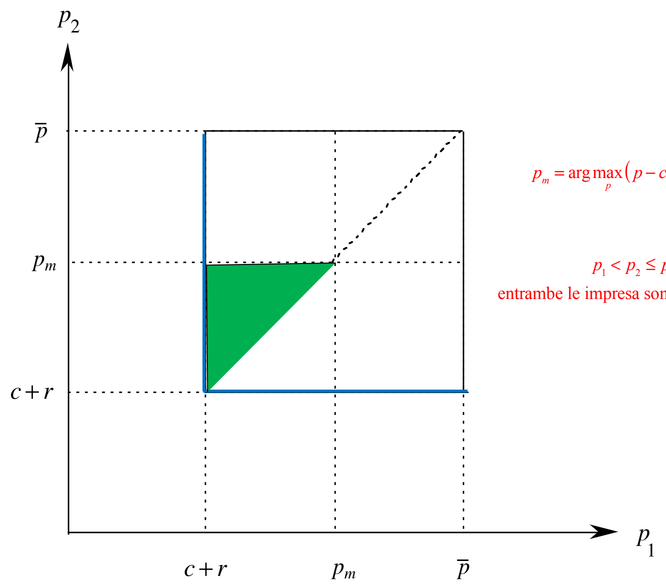
$p_m = \arg\max_p (p-c-r)D(p)$

$p_1 = p_2 \leq p_m$

entrambe le impresa sono insoddisfatte
ciascuna avrebbe preferito
scegliere un prezzo inferiore
a quello della rivale

51

Il gioco prezzo-capacità



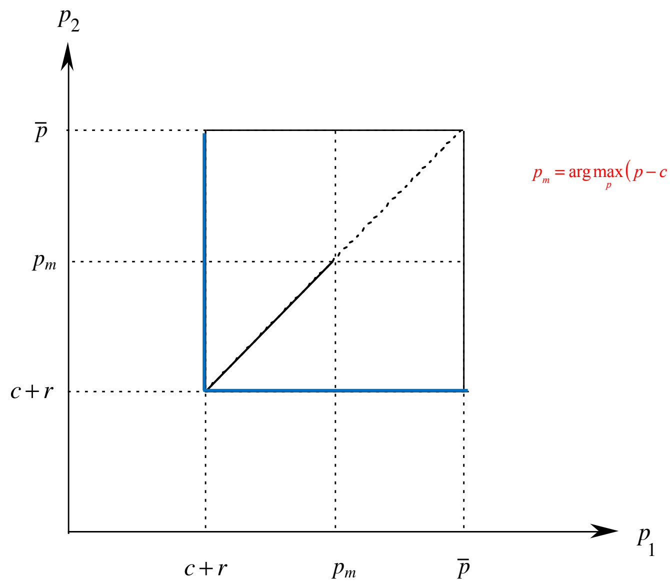
$p_m = \arg\max_p (p-c-r)D(p)$

$p_1 < p_2 \leq p_m$

entrambe le impresa sono insoddisfatte

52

Il gioco prezzo-capacità



$p_m = \arg\max_p (p-c-r)D(p)$

53

c'è un "problema di coordinamento su cui non indaghiamo"

Il gioco prezzo-capacità

$c + \boxed{r =} p_i < p_j \Rightarrow$

$$\Pi_i(p_i, p_j, k_i) = \begin{cases} (p_i - c - r)k_i - F & \text{se } \ 0 \le k_i \le D(p_i) \\ (p_i - c)D(p_i) - rk_i - F & \text{se } \ D(p_i) \le k_i \le D(c) \end{cases}$$

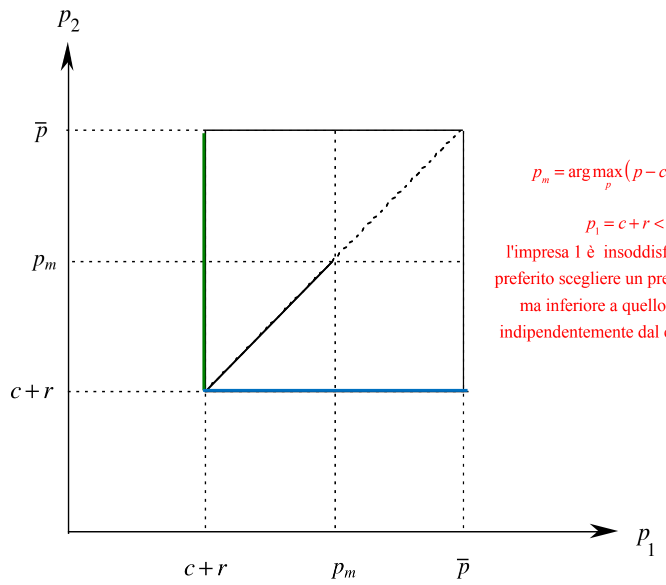
$$\arg\max \Pi_i(p_i, p_j, k_i) \in \left[0, D(p_i)\right]$$

$$\Pi_j(p_i, p_j, k_i) = \begin{cases} (p_j - c - r)k_i - F & \text{se } \ 0 \le k_j \le D(p_j) - k_i \\ (p_i - c)\left[D(p_j) - k_i\right] - rk_i - F & \text{se } \ D(p_j) - k_i \le k_j \le D(c) - k_i \end{cases}$$

$$\arg\max_{k_j} \Pi_j(p_i, p_j, k_j) = D(p_j) - k_i$$

54

Il gioco prezzo-capacità



$p_m = \arg\max_p (p-c-r)D(p)$

$p_1 = c+r < p_2$

l'impresa 1 è insoddisfatta: avrebbe preferito scegliere un prezzo maggiore, ma inferiore a quello della rivale indipendentemente dal coordinamento

55

Il gioco prezzo-capacità

$$c + r = p_i = p_j \Rightarrow \Pi_i(p_i,p_j,k_i,k_j) =$$

$$= \begin{cases} (p_i - c - r)k_i - F = -F & \text{se } \; 0 \le k_i \le \max\left\{\frac{D(p_i)}{2}, D(p_i) - k_j\right\} \\ (p_i - c)\max\left\{\frac{D(p_i)}{2}, D(p_i) - k_j\right\} - rk_i - F < -F & \text{se } \; \max\left\{\frac{D(p_i)}{2}, D(p_i) - k_j\right\} \le k_i \le D(c) \end{cases}$$

$$\arg\max_{k_i} \Pi_i(p_i,p_j,k_i) \in$$

$$\in \begin{cases} \left[0, D(p_i) - k_j\right] & \text{se } \; k_j \le \frac{D(p_i)}{2} \\ \left[0, \frac{D(p_i)}{2}\right] & \text{se } \; k_j \ge \frac{D(p_i)}{2} \end{cases}$$

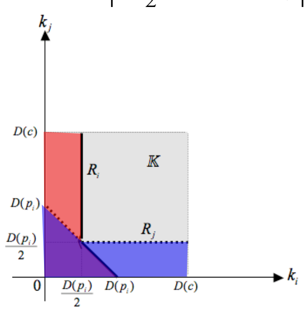


Figura 3.4. Funzioni di reazione quando $p_i = p_j > c + r$

56

c'è un "problema di coordinamento su cui non indaghiamo"

Il gioco prezzo-capacità

$c+r=p_i=p_j \Rightarrow \Pi_i(p_i,p_j,k_i,k_j)=$

$$=\begin{cases} (p_i-c-r)k_i-F=-F & \text{se } 0\le k_i\le \max\left\{\frac{D(p_i)}{2},D(p_i)-k_j\right\} \\ (p_i-c)\max\left\{\frac{D(p_i)}{2},D(p_i)-k_j\right\}-rk_i-F<-F & \text{se } \max\left\{\frac{D(p_i)}{2},D(p_i)-k_j\right\}\le k_i\le D(c) \end{cases}$$

$\arg\max_{k_i}\Pi_i(p_i,p_j,k_i)\in$

$$\in\begin{cases} \left[0,D(p_i)-k_j\right] & \text{se } k_j\le \frac{D(p_i)}{2} \\ \left[0,\frac{D(p_i)}{2}\right] & \text{se } k_j\ge \frac{D(p_i)}{2} \end{cases}$$

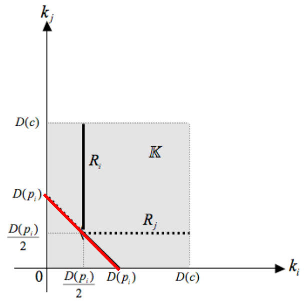
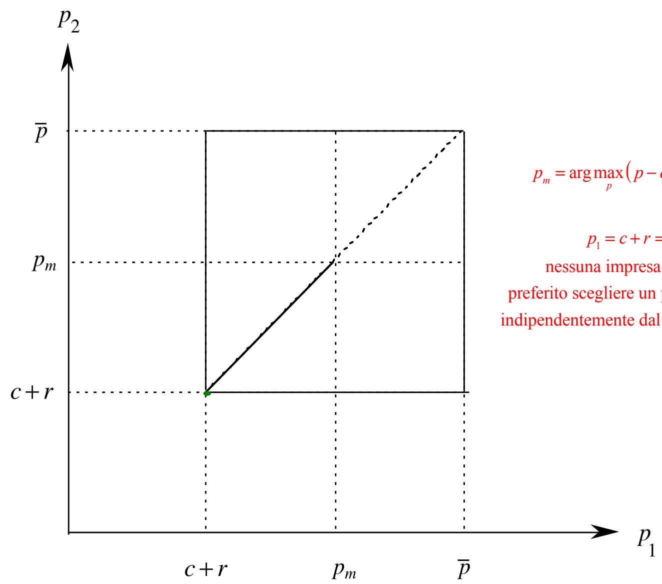


Figura 3.4. Funzioni di reazione quando $p_i=p_j>c+r$

57

Il gioco prezzo-capacità



$p_m=\arg\max_p (p-c-r)D(p)$

$p_1=c+r=p_2$
nessuna impresa avrebbe
preferito scegliere un prezzo diverso
indipendentemente dal coordinamento

58

Il dilemma del prigioniero ripetuto un numero infinito di volte

- Non siamo in grado di individuare tutti gli equilibri di Nash.
- Esistenza di strategie che giocate in modo credibile da un giocatore inducono l'altro giocatore a cooperare ad ogni stadio del gioco.

59

Strategie che inducono l'altro giocatore a cooperare

- Trigger strategy
- Tit for tat strategy

60

Trigger strategy: definizione

- Sia a_t la strategia del giocatore *A* giocata o da giocare al tempo *t*.
- Sia b_t la strategia del giocatore *B* giocata al tempo *t*.
- La Trigger strategy per il giocatore *A* consiste in

$$\begin{cases} a_t = a_C & \text{se } t = 1 \text{ o } t > 1 \text{ e } a_s = a_c \text{ e } b_s = b_c \ \forall s < t \\ a_t = a_{NC} & \text{in tutti gli altri casi} \end{cases}$$

61

Tit for tat strategy: definizione

- Sia a_t la strategia del giocatore *A* giocata o da giocare al tempo *t*.
- Sia b_t la strategia del giocatore *B* giocata al tempo *t*.
- La Tit for tat strategy per il giocatore *A* consiste in

$$\begin{cases} a_t = a_C & \text{se } t = 1 \text{ o } t > 1 \text{ e } \ b_{t-1} = b_c \\ a_t = a_{NC} & \text{in tutti gli altri casi} \end{cases}$$

62

Trigger strategy: equilibrio di Nash

- Se entrambi i giocatori adottano la Trigger strategy, allora entrambi collaborano sempre.
- Domanda: è un equilibrio di Nash?
- Supponiamo che *A* l'adotti e che *B* adotti una qualsiasi strategia *y*.

63

Tit for tat strategy: equilibrio di Nash

- Se entrambi i giocatori adottano la Tit for tat strategy, allora entrambi collaborano sempre.
- Domanda: è un equilibrio di Nash?
- Supponiamo che *A* l'adotti e che *B* adotti una qualsiasi strategia *y*.

64

Trigger strategy: equilibrio di Nash

Per stabilire sotto quali condizioni la trigger strategy è un equilibrio di Nash, assumiamo che il giocatore 1 adotti questa strategia e il giocatore 2 valuti cosa fare, seguendo una qualsiasi strategia y.

Gli esiti ottenuti dal giocatore 2 sono rappresentati dalla successione $Y_0, Y_1, \ldots, Y_t, \ldots$.

Il valore della strategia y è dato dal valore attuale degli esiti $V(y) = \sum_{t=0}^{\infty} d^t Yt$ dove $0 < d < 1$ è il fattore di sconto.

Da cosa dipendono gli Y_t?

65

Trigger strategy: equilibrio di Nash

Poiché il giocatore 1 gioca la *trigger strategy*, se $Y_{t'} = C$, allora $Y_t = C$ per ogni $t < t'$; inoltre non possono esistere t' e t'', $t'' \neq t'$, tali che $Y_{t'} = Y_{t''} = D$. Abbiamo due casi possibili:

(i) Esiste $\tau \in \mathbb{N}_0$ tale che $Y_\tau = D$ e, se $\tau > 0$, $Y_t = C$ per ogni $0 \leq t < \tau$;

(ii) $Y_t = C$ per ogni t.

$$
\begin{array}{lcll}
Y_t = C & \Rightarrow & Y_{t-1} = C, & Y_{t+1} = C \text{ o } D \\
Y_t = NC & \Rightarrow & Y_{t-1} = NC \text{ o } D, & Y_{t+1} = NC \text{ o } ND \\
Y_t = D & \Rightarrow & Y_{t-1} = C, & Y_{t+1} = NC \text{ o } ND \\
Y_t = ND & \Rightarrow & Y_{t-1} = NC \text{ o } D, & Y_{t+1} = NC \text{ o } ND
\end{array}
$$

66

Trigger strategy: equilibrio di Nash

Una strategia non coincide con la successione degli esiti in quanto strategie diverse possono dare luogo alla stessa successione. Se il valore attuale degli esiti della strategia y è maggiore del valore attuale degli esiti della strategia y' (nell'ipotesi che l'altro giocatore giochi la *trigger strategy*) diciamo che la strategia y domina la strategia y'. Diciamo ugualmente che la strategia y domina la strategia y' quando il valore atteso degli esiti della strategia y è uguale al valore atteso della strategia y', ma la strategia y conduce ad una maggiore collusione della strategia y'.

$$\begin{array}{lcll}
Y_t = C & \Rightarrow & Y_{t-1} = C, & Y_{t+1} = C \text{ o } D \\
Y_t = NC & \Rightarrow & Y_{t-1} = NC \text{ o } D, & Y_{t+1} = NC \text{ o } ND \\
Y_t = D & \Rightarrow & Y_{t-1} = C, & Y_{t+1} = NC \text{ o } ND \\
Y_t = ND & \Rightarrow & Y_{t-1} = NC \text{ o } D, & Y_{t+1} = NC \text{ o } ND
\end{array}$$

67

Tit for tat strategy: equilibrio di Nash

Gli esiti ottenuti dal giocatore 2 siano allora rappresentati dalla successione

$$Y_0, Y_1, \ldots, Y_t, \ldots$$

Poiché il giocatore 1 gioca la *Tit-for-tat strategy*,

– se $Y_t = C$, allora $Y_{t-1} = C$ o ND e $Y_{t+1} = C$ o D;
– se $Y_t = NC$, allora $Y_{t-1} = NC$ o D e $Y_{t+1} = NC$ o ND;
– se $Y_t = D$, allora $Y_{t-1} = C$ o ND e $Y_{t+1} = NC$ o ND;
– se $Y_t = ND$, allora $Y_{t-1} = NC$ o D e $Y_{t+1} = C$ o D.

Inoltre $Y_0 = C$ o D. Abbiamo quattro casi possibili:

68

Tit for tat strategy: equilibrio di Nash

(i) Esistono due successioni

$$\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n, ...$$

$$\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n, ...$$

tali che

$$0 \le \tau_1 < \theta_1 < \tau_2 < \theta_2 < ... < \tau_n < \theta_n < ...$$

e $Y_{\tau_i} = D$, $Y_{\theta_i} = ND$, $Y_t = NC$ se $\tau_i < t < \theta_i$, $Y_t = C$ se $0 \le t < \tau_1$ o $\theta_i < t < \tau_{i+1}$.

69

Tit for tat strategy: equilibrio di Nash

(ii) Esistono n numeri $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n$ ed $n - 1$ numeri $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_{n-1}$ $(n \ge 1)$ tali che

$$0 \le \tau_1 < \theta_1 < \tau_2 < \theta_2 < ... < \tau_{n-1} < \theta_{n-1} < \tau_n$$

e $Y_{\tau_i} = D$, $Y_{\theta_i} = ND$, $Y_t = NC$ se $\tau_i < t < \theta_i$ o $t > \tau_n$, $Y_t = C$ se $0 \le t < \tau_1$ o $\theta_i < t < \tau_{i+1}$.

(iii) Esistono n numeri $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n$ ed n numeri $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n$ $(n \ge 1)$ tali che

$$0 \le \tau_1 < \theta_1 < \tau_2 < \theta_2 < ... < \tau_n < \theta_n$$

e $Y_{\tau_i} = D$, $Y_{\theta_i} = ND$, $Y_t = NC$ se $\tau_i < t < \theta_i$, $Y_t = C$ se $0 \le t < \tau_1$ o $\theta_i < t < \tau_{i+1}$ o $t > \theta_n$.

(iv) $Y_t = C$ per ogni t.

70

Trigger strategy: equilibrio di Nash

Nel caso (i) la strategia y è certamente dominata da altre strategie se $Y_t = ND$ per qualche $t > \tau$, per cui possiamo certamente supporre che $Y_t = NC$ per ogni $t > \tau$. Analizziamo questo caso. Consideriamo due strategie, y e y', tali che $Y_t = Y'_t$ per ogni t tranne che in ω e $\omega + 1$ in cui $Y_\omega = C$, $Y_{\omega+1} = D$, $Y'_\omega = D$, $Y'_{\omega+1} = NC$ (ovviamente $Y_t = Y'_t = C$ se $0 \le t < \omega$ e $Y_t = Y'_t = NC$ se $t \ge \omega + 2$). La differenza tra i valori attuali degli esiti delle due strategie sono:

$$V(y) - V(y') = Cd^{\omega} + Dd^{\omega+1} - Dd^{\omega} - NCd^{\omega+1} = d^{\omega}(C - D) + d^{\omega+1}(D - NC).$$

71

Trigger strategy: equilibrio di Nash

Se $V(y) - V(y') \ge 0$, allora la strategia y, che conduce ad una deviazione nel periodo $t = \omega + 1$, domina la strategia y', che conduce ad una deviazione nel periodo $t = \omega$; mentre se $V(y) - V(y') < 0$, è, tra le due, la strategia in cui la deviazione avviene nel periodo $t = \omega$ a dominare la strategia in cui la deviazione avviene nel periodo $t = \omega + 1$. Dato che $V(y) - V(y') = d^{\omega}[(C - D) + (D - NC)d]$,

$$V(y) - V(y') \ge 0 \Leftrightarrow d \ge \frac{D - C}{D - NC} \Leftrightarrow r \le \frac{C - NC}{D - C}.$$

$$(C - D) + (D - NC)d \ge 0$$
$$(D - NC)d \ge D - C$$
$$d \ge \frac{D - C}{D - NC} \Leftrightarrow r \le \frac{C - NC}{D - C}$$

$$\frac{1}{1 + r} \ge \frac{D - C}{D - NC}$$
$$D - NC \ge (1 + r)(D - C)$$
$$C - NC \ge r(D - C)$$

72

Trigger strategy: equilibrio di Nash

Il segno di $V(y) - V(y')$ non dipende da ω, quindi dati gli esiti e il fattore di sconto (ovvero il saggio d'interesse) sappiamo che se queste disuguaglianze sono rispettate, al giocatore 2 conviene una strategia che procrastina la defezione all'infinito, mentre conviene una strategia che anticipa la deviazione al periodo $t = 0$ nel caso opposto. Questo significa che ci sono solo due insiemi di strategie che possono essere dominanti: quelle con gli esiti (ii), che sono dominanti se e solo se $r \leq (C - NC)/(D - C)$, e quelle con gli esiti $Y_0 = D$ e $Y_t = NC$ per ogni $t \geq 1$, che sono dominanti se e solo se $r > (C - NC)/(D - C)$

73

Trigger strategy: equilibrio di Nash

$$r \leq \frac{C-NC}{D-C} \Rightarrow$$

$$\cancel{(i)\exists\tau : Y_t = C \text{ se } t<\tau, Y_\tau = D, Y_t = NC \text{ se } t>\tau}$$

$$(ii) Y_t = C \quad \forall t$$

$$r > \frac{C-NC}{D-C} \Rightarrow \qquad Y_0 = D, Y_t = NC \text{ se } t>0$$

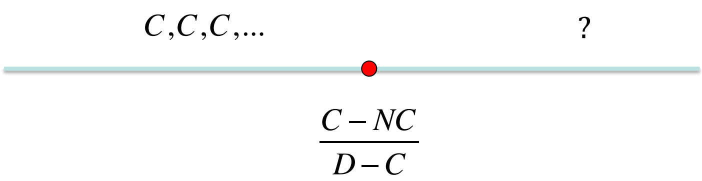
$$(i)\exists\tau : Y_t = C \text{ se } t<\tau, Y_\tau = D, Y_t = NC \text{ se } t>\tau$$

$$(ii) Y_t = C \quad \forall t$$

74

Trigger strategy

$$\boxed{r \leq \frac{C-NC}{D-C}}$$



75

Trigger strategy: equilibrio di Nash

$$r > \frac{C-NC}{D-C} \Rightarrow$$

$$D + dNC + d^2NC + \ldots + d^tNC + \ldots > C + dC + \ldots + d^tC + \ldots$$

$$D + \frac{d}{1-d}NC > \frac{1}{1-d}C$$

$$(1-d)D + dNC > C$$

$$D - C > d(D - NC)$$

$$(1+r)(D-C) > D - NC$$

$$r(D-C) > C - NC$$

$$S_t = 1 + d + d^2 + \ldots + d^t$$

$$(1-d)S_t = 1 - d^{t+1}$$

$$S_t = \frac{1-d^{t+1}}{1-d}$$

$$\lim_{t\to\infty} S_t = \frac{1}{1-d}$$

76

Trigger strategy

$$\boxed{r \le \frac{C-NC}{D-C}}$$

$C, C, C, \ldots$ $\qquad$ $D, NC, NC, \ldots$

$$\frac{C-NC}{D-C}$$

77

Tit for tat strategy:

$$r \le \frac{C-NC}{D-C} \Rightarrow \text{Conviene posticipare la deviazione}$$

(i) Esistono due successioni

$$\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots \qquad \tau_i = \theta_i - 1$$

$$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n, \ldots$$

~~(ii) Esistono n numeri $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ ed $n-1$ numeri $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-1}$ $(n \ge 1)$ tali che~~

$$\cancel{0 \le \tau_1 < \theta_1 < \tau_2 < \theta_2 < \ldots < \tau_{n-1} < \theta_{n-1} < \tau_n}$$

(iii) Esistono n numeri $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ ed n numeri $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ $(n \ge 1)$ tali che

$$0 \le \tau_1 < \theta_1 < \tau_2 < \theta_2 < \ldots < \tau_n < \theta_n \qquad \tau_i = \theta_i - 1$$

(iv) $Y_t = C$ per ogni t.

78

Tit for tat strategy: equilibrio di Nash

$$r \le \frac{C-NC}{D-C} \Rightarrow$$

$$(i)\ \exists\ \tau_1, \tau_2, ..., \tau_t, ...:$$

$$Y_{\tau_i} = D, Y_{\tau_i+1} = ND, Y_t = C \text{ se } \tau_i + 1 < t < \tau_{i+1}$$

$$(iii)\ \exists\ \tau_1, \tau_2, ..., \tau_t, ..., \tau_n :$$

$$Y_{\tau_i} = D, Y_{\tau_i+1} = ND, Y_t = C \text{ se } \tau_i + 1 < t < \tau_{i+1}, t > \tau_n + 1$$

$$(iv)\ Y_t = C \quad \forall t$$

79