

Lezione 3/5/24

- Ancora sul gioco varietà-prezzo.
- Ancora sul gioco prezzo-capacità.
- Ancora sulla Trigger strategy.
- Tit for tat strategy (introduzione)

1

Prossime lezioni

- Le lezioni dell'8 e del 10 maggio non saranno tenute.
- La lezione successiva si svolgerà martedì 14 maggio alle ore 14:00 in aula Q1.

2

Il dilemma del prigioniero ripetuto un numero infinito di volte

- Non siamo in grado di individuare tutti gli equilibri di Nash.
- Esistenza di strategie che giocate in modo credibile da un giocatore inducono l'altro giocatore a cooperare ad ogni stadio del gioco.

3

Strategie che inducono l'altro giocatore a cooperare

- Trigger strategy
- Tit for tat strategy

4

Trigger strategy: definizione

- Sia a_t la strategia del giocatore A giocata o da giocare al tempo t .
- Sia b_t la strategia del giocatore B giocata al tempo t .
- La Trigger strategy per il giocatore A consiste in

$$\begin{cases} a_t = a_C & \text{se } t=1 \text{ o } t>1 \text{ e } a_s = a_c \text{ e } b_s = b_c \quad \forall s < t \\ a_t = a_{NC} & \text{in tutti gli altri casi} \end{cases}$$

5

Tit for tat strategy: definizione

- Sia a_t la strategia del giocatore A giocata o da giocare al tempo t .
- Sia b_t la strategia del giocatore B giocata al tempo t .
- La Tit for tat strategy per il giocatore A consiste in

$$\begin{cases} a_t = a_C & \text{se } t=1 \text{ o } t>1 \text{ e } b_{t-1} = b_c \\ a_t = a_{NC} & \text{in tutti gli altri casi} \end{cases}$$

6

Trigger strategy: equilibrio di Nash

- Se entrambi i giocatori adottano la Trigger strategy, allora entrambi collaborano sempre.
- Domanda: è un equilibrio di Nash?
- Supponiamo che A l'adotti e che B adotti una qualsiasi strategia y .

7

Tit for tat strategy: equilibrio di Nash

- Se entrambi i giocatori adottano la Tit for tat strategy, allora entrambi collaborano sempre.
- Domanda: è un equilibrio di Nash?
- Supponiamo che A l'adotti e che B adotti una qualsiasi strategia y .

8

Trigger strategy: equilibrio di Nash

Per stabilire sotto quali condizioni la trigger strategy è un equilibrio di Nash, assumiamo che il giocatore 1 adotti questa strategia e il giocatore 2 valuti cosa fare, seguendo una qualsiasi strategia y .

Gli esiti ottenuti dal giocatore 2 sono rappresentati dalla successione $Y_0, Y_1, \dots, Y_t, \dots$.

Il valore della strategia y è dato dal valore attuale degli esiti $V(y) = \sum_{t=0}^{\infty} d^t Y_t$ dove $0 < d < 1$ è il fattore di sconto.

Da cosa dipendono gli Y_t ?

9

Trigger strategy: equilibrio di Nash

Poiché il giocatore 1 gioca la *trigger strategy*, se $Y_{t'} = C$, allora $Y_t = C$ per ogni $t < t'$; inoltre non possono esistere t' e t'' , $t'' \neq t'$, tali che $Y_{t'} = Y_{t''} = D$. Abbiamo due casi possibili:

- (i) Esiste $\tau \in \mathbb{N}_0$ tale che $Y_\tau = D$ e, se $\tau > 0$, $Y_t = C$ per ogni $0 \leq t < \tau$;
- (ii) $Y_t = C$ per ogni t .

$$Y_t = C \quad \Rightarrow \quad Y_{t-1} = C, \quad Y_{t+1} = C \text{ o } D$$

$$Y_t = NC \quad \Rightarrow \quad Y_{t-1} = NC \text{ o } D, \quad Y_{t+1} = NC \text{ o } ND$$

$$Y_t = D \quad \Rightarrow \quad Y_{t-1} = C, \quad Y_{t+1} = NC \text{ o } ND$$

$$Y_t = ND \quad \Rightarrow \quad Y_{t-1} = NC \text{ o } D, \quad Y_{t+1} = NC \text{ o } ND$$

10

Trigger strategy: equilibrio di Nash

Una strategia non coincide con la successione degli esiti in quanto strategie diverse possono dare luogo alla stessa successione. Se il valore attuale degli esiti della strategia y è maggiore del valore attuale degli esiti della strategia y' (nell'ipotesi che l'altro giocatore giochi la *trigger strategy*) diciamo che la strategia y domina la strategia y' . Diciamo ugualmente che la strategia y domina la strategia y' quando il valore atteso degli esiti della strategia y è uguale al valore atteso della strategia y' , ma la strategia y conduce ad una maggiore collusione della strategia y' .

$$\begin{aligned}
 Y_t = C &\Rightarrow Y_{t-1} = C, & Y_{t+1} = C \text{ o } D \\
 Y_t = NC &\Rightarrow Y_{t-1} = NC \text{ o } D, & Y_{t+1} = NC \text{ o } ND \\
 Y_t = D &\Rightarrow Y_{t-1} = C, & Y_{t+1} = NC \text{ o } ND \\
 Y_t = ND &\Rightarrow Y_{t-1} = NC \text{ o } D, & Y_{t+1} = NC \text{ o } ND
 \end{aligned}$$

11

Tit for tat strategy: equilibrio di Nash

Gli esiti ottenuti dal giocatore 2 siano allora rappresentati dalla successione

$$Y_0, Y_1, \dots, Y_t, \dots$$

Poiché il giocatore 1 gioca la *Tit-for-tat strategy*,

- se $Y_t = C$, allora $Y_{t-1} = C \text{ o } ND$ e $Y_{t+1} = C \text{ o } D$;
- se $Y_t = NC$, allora $Y_{t-1} = NC \text{ o } D$ e $Y_{t+1} = NC \text{ o } ND$;
- se $Y_t = D$, allora $Y_{t-1} = C \text{ o } ND$ e $Y_{t+1} = NC \text{ o } ND$;
- se $Y_t = ND$, allora $Y_{t-1} = NC \text{ o } D$ e $Y_{t+1} = C \text{ o } D$.

Inoltre $Y_0 = C \text{ o } D$. Abbiamo quattro casi possibili:

12

Tit for tat strategy: equilibrio di Nash

(i) Esistono due successioni

$$\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \dots$$

$$\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n, \dots$$

tali che

$$0 \leq \tau_1 < \theta_1 < \tau_2 < \theta_2 < \dots < \tau_n < \theta_n < \dots$$

e $Y_{\tau_i} = D$, $Y_{\theta_i} = ND$, $Y_t = NC$ se $\tau_i < t < \theta_i$, $Y_t = C$ se $0 \leq t < \tau_1$ o $\theta_i < t < \tau_{i+1}$.

13

Tit for tat strategy: equilibrio di Nash

(ii) Esistono n numeri $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ ed $n - 1$ numeri $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}$ ($n \geq 1$) tali che

$$0 \leq \tau_1 < \theta_1 < \tau_2 < \theta_2 < \dots < \tau_{n-1} < \theta_{n-1} < \tau_n$$

e $Y_{\tau_i} = D$, $Y_{\theta_i} = ND$, $Y_t = NC$ se $\tau_i < t < \theta_i$ o $t > \tau_n$, $Y_t = C$ se $0 \leq t < \tau_1$ o $\theta_i < t < \tau_{i+1}$.

(iii) Esistono n numeri $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ ed n numeri $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ ($n \geq 1$) tali che

$$0 \leq \tau_1 < \theta_1 < \tau_2 < \theta_2 < \dots < \tau_n < \theta_n$$

e $Y_{\tau_i} = D$, $Y_{\theta_i} = ND$, $Y_t = NC$ se $\tau_i < t < \theta_i$, $Y_t = C$ se $0 \leq t < \tau_1$ o $\theta_i < t < \tau_{i+1}$ o $t > \theta_n$.

(iv) $Y_t = C$ per ogni t .

14

Trigger strategy: equilibrio di Nash

Nel caso (i) la strategia y è certamente dominata da altre strategie se $Y_t = ND$ per qualche $t > \tau$, per cui possiamo certamente supporre che $Y_t = NC$ per ogni $t > \tau$. Analizziamo questo caso. Consideriamo due strategie, y e y' , tali che $Y_t = Y'_t$ per ogni t tranne che in ω e $\omega + 1$ in cui $Y_\omega = C, Y_{\omega+1} = D, Y'_\omega = D, Y'_{\omega+1} = NC$ (ovviamente $Y_t = Y'_t = C$ se $0 \leq t < \omega$ e $Y_t = Y'_t = NC$ se $t \geq \omega + 2$). La differenza tra i valori attuali degli esiti delle due strategie sono:

$$V(y) - V(y') = Cd^\omega + Dd^{\omega+1} - Dd^\omega - NCD^{\omega+1} = d^\omega(C - D) + d^{\omega+1}(D - NC).$$

15

Trigger strategy: equilibrio di Nash

Se $V(y) - V(y') \geq 0$, allora la strategia y , che conduce ad una deviazione nel periodo $t = \omega + 1$, domina la strategia y' , che conduce ad una deviazione nel periodo $t = \omega$; mentre se $V(y) - V(y') < 0$, è, tra le due, la strategia in cui la deviazione avviene nel periodo $t = \omega$ a dominare la strategia in cui la deviazione avviene nel periodo $t = \omega + 1$. Dato che $V(y) - V(y') = d^\omega[(C - D) + (D - NC)d]$,

$$V(y) - V(y') \geq 0 \Leftrightarrow d \geq \frac{D - C}{D - NC} \Leftrightarrow r \leq \frac{C - NC}{D - C}.$$

$$(C - D) + (D - NC)d \geq 0$$

$$(D - NC)d \geq D - C$$

$$d \geq \frac{D - C}{D - NC} \Leftrightarrow r \leq \frac{C - NC}{D - C}$$

$$\frac{1}{1+r} \geq \frac{D - C}{D - NC}$$

$$D - NC \geq (1+r)(D - C)$$

$$C - NC \geq r(D - C)$$

16

Trigger strategy: equilibrio di Nash

Il segno di $V(y) - V(y')$ non dipende da ω , quindi dati gli esiti e il fattore di sconto (ovvero il saggio d'interesse) sappiamo che se queste disuguaglianze sono rispettate, al giocatore 2 conviene una strategia che procrastina la defezione all'infinito, mentre conviene una strategia che anticipa la deviazione al periodo $t = 0$ nel caso opposto. Questo significa che ci sono solo due insiemi di strategie che possono essere dominanti: quelle con gli esiti (ii), che sono dominanti se e solo se $r \leq (C - NC)/(D - C)$, e quelle con gli esiti $Y_0 = D$ e $Y_t = NC$ per ogni $t \geq 1$, che sono dominanti se e solo se $r > (C - NC)/(D - C)$

17

Trigger strategy: equilibrio di Nash

$$r \leq \frac{C - NC}{D - C} \Rightarrow$$

~~$$(i) \exists \tau : Y_t = C \text{ se } t < \tau, Y_t = D, Y_t = NC \text{ se } t > \tau$$~~

$$(ii) Y_t = C \quad \forall t$$

$$r > \frac{C - NC}{D - C} \Rightarrow \quad Y_0 = D, Y_t = NC \text{ se } t > 0$$

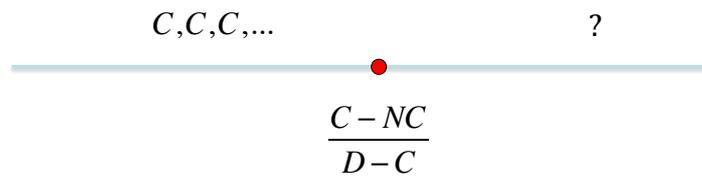
$$(i) \exists \tau : Y_t = C \text{ se } t < \tau, Y_t = D, Y_t = NC \text{ se } t > \tau$$

$$(ii) Y_t = C \quad \forall t$$

18

Trigger strategy

$$r \leq \frac{C - NC}{D - C}$$



19

Trigger strategy: equilibrio di Nash

$$r > \frac{C - NC}{D - C} \Rightarrow$$

$$D + dNC + d^2NC + \dots + d^tNC + \dots > C + dC + \dots + d^tC + \dots$$

$$D + \frac{d}{1-d}NC > \frac{1}{1-d}C$$

$$(1-d)D + dNC > C$$

$$D - C > d(D - NC)$$

$$(1+r)(D - C) > D - NC$$

$$r(D - C) > C - NC$$

$$S_t = 1 + d + d^2 + \dots + d^t$$

$$(1-d)S_t = 1 - d^{t+1}$$

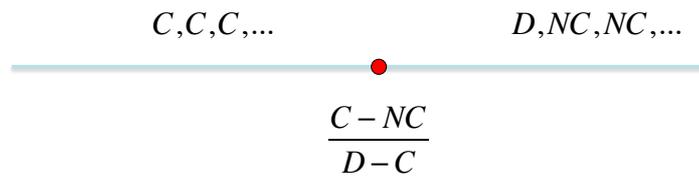
$$S_t = \frac{1 - d^{t+1}}{1 - d}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S_t = \frac{1}{1 - d}$$

20

Trigger strategy

$$r \leq \frac{C - NC}{D - C}$$



21

Tit for tat strategy:

$$r \leq \frac{C - NC}{D - C} \Rightarrow \text{Conviene posticipare la deviazione}$$

(i) Esistono due successioni

$$\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \dots \quad \tau_i = \theta_i - 1$$

$$\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n, \dots$$

~~(ii) Esistono n numeri $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ ed $n - 1$ numeri $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}$ ($n \geq 1$) tali che~~

~~$$0 \leq \tau_1 < \theta_1 < \tau_2 < \theta_2 < \dots < \tau_{n-1} < \theta_{n-1} < \tau_n$$~~

(iii) Esistono n numeri $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ ed n numeri $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ ($n \geq 1$) tali che

$$0 \leq \tau_1 < \theta_1 < \tau_2 < \theta_2 < \dots < \tau_n < \theta_n \quad \tau_i = \theta_i - 1$$

(iv) $Y_t = C$ per ogni t .

22

Tit for tat strategy: equilibrio di Nash

$$r \leq \frac{C - NC}{D - C} \Rightarrow$$

$$(i) \exists \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_t, \dots :$$

$$Y_{\tau_i} = D, Y_{\tau_i+1} = ND, Y_t = C \text{ se } \tau_i + 1 < t < \tau_{i+1}$$

$$(iii) \exists \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_t, \dots, \tau_n :$$

$$Y_{\tau_i} = D, Y_{\tau_i+1} = ND, Y_t = C \text{ se } \tau_i + 1 < t < \tau_{i+1}, t > \tau_n + 1$$

$$(iv) Y_t = C \quad \forall t$$

23

Tit for tat strategy: equilibrio di Nash

Consideriamo due strategie, y e y' tali che $Y_t = Y'_t$ per ogni t tranne in ω e $\omega + 1$ in cui $Y_\omega = C, Y_{\omega+1} = C, Y'_\omega = D, Y'_{\omega+1} = ND$ (nell'ipotesi che $Y_{\omega+2} = Y'_{\omega+2} = C$ o ND e, se $\omega > 0$, $Y_{\omega-1} = Y'_{\omega-1} = C$ o ND):

$$V(y) - V(y') = Cd^\omega + Cd^{\omega+1} - Dd^\omega - NDd^{\omega+1} = d^\omega [C - D - d(ND - C)].$$

Da cui,

$$V(y) - V(y') \geq 0 \Leftrightarrow d \geq \frac{D - C}{C - ND} \Leftrightarrow r \leq \frac{2C - D - ND}{D - C}.$$

$$(C - D) + (C - ND)d \geq 0$$

$$(C - ND)d \geq D - C$$

$$d \geq \frac{D - C}{C - ND} \Leftrightarrow r \leq \frac{2C - D - ND}{D - C}$$

$$\frac{1}{1+r} \geq \frac{D - C}{C - ND}$$

$$C - ND \geq (1+r)(D - C)$$

$$2C - D - ND \geq r(D - C)$$

24

Tit for tat strategy: equilibrio di Nash

$$r \leq \frac{C - NC}{D - C}, r \leq \frac{2C - D - ND}{D - C} \Rightarrow$$

~~$$(i) \exists \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_t, \dots:$$~~

~~$$Y_{\tau_i} = D, Y_{\tau_{i+1}} = ND, Y_t = C \text{ se } \tau_i + 1 < t < \tau_{i+1}$$~~

~~$$(iii) \exists \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_t, \dots, \tau_n:$$~~

~~$$Y_{\tau_i} = D, Y_{\tau_{i+1}} = ND, Y_t = C \text{ se } \tau_i + 1 < t < \tau_{i+1}, t > \tau_n + 1$$~~

$$(iv) Y_t = C \quad \forall t$$

25

Tit for tat strategy: equilibrio di Nash

$$r \leq \frac{C - NC}{D - C}, r \leq \frac{2C - D - ND}{D - C}$$

$$r \leq \min \left\{ \frac{C - NC}{D - C}, \frac{2C - D - ND}{D - C} \right\}$$

26

Tit for tat strategy: equilibrio di Nash

$$D + ND \leq C + NC \Rightarrow$$

$$r \leq \min \left\{ \frac{C - NC}{D - C}, \frac{2C - D - ND}{D - C} \right\} = \frac{C - NC}{D - C}$$

$$D + ND \geq C + NC \Rightarrow$$

$$r \leq \min \left\{ \frac{C - NC}{D - C}, \frac{2C - D - ND}{D - C} \right\} = \frac{2C - D - ND}{D - C}$$

27

Tit for tat strategy e Trigger strategy (confronto)

$$r \leq \frac{C - NC}{D - C} \quad \text{se } C + NC \geq D + ND$$

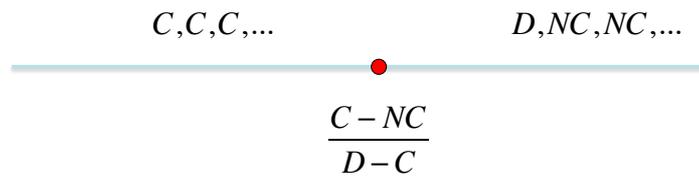
$$r \leq \frac{2C - D - ND}{D - C} \quad \text{se } C + NC \leq D + ND$$

$$r \leq \frac{C - NC}{D - C}$$

28

Trigger strategy

$$r \leq \frac{C - NC}{D - C}$$

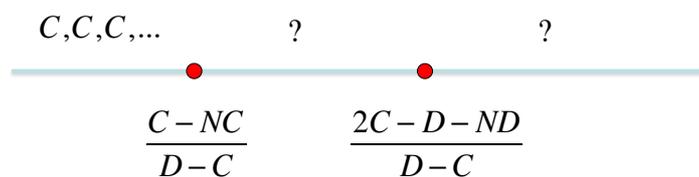


29

Tit for tat strategy

$$r \leq \frac{C - NC}{D - C} \quad \text{se } C + NC \geq D + ND$$

$$r \leq \frac{2C - D - ND}{D - C} \quad \text{se } C + NC \leq D + ND$$

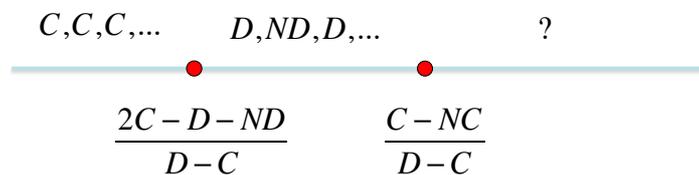


30

Tit for tat strategy

$$r \leq \frac{C - NC}{D - C} \quad \text{se } C + NC \geq D + ND$$

$$r \leq \frac{2C - D - ND}{D - C} \quad \text{se } C + NC \leq D + ND$$



31

Tit for tat strategy

Consideriamo due strategie, y e y' tali che $Y_t = Y'_t$ per ogni t tranne in ω e $\omega + 1$ in cui $Y_\omega = NC$, $Y_{\omega+1} = NC$, $Y'_\omega = ND$, $Y'_{\omega+1} = D$ (nell'ipotesi che $Y_{\omega+2} = Y'_{\omega+2} = NC$ o ND e, se $\omega > 0$, $Y_{\omega-1} = Y'_{\omega-1} = NC$ o ND):

$$V(y) - V(y') = NCd^\omega + NCd^{\omega+1} - NDd^\omega - Dd^{\omega+1} = d^\omega [NC - ND - d(D - NC)].$$

Da cui,

$$V(y) - V(y') \geq 0 \Leftrightarrow d \leq \frac{NC - ND}{D - NC} \Leftrightarrow r \geq \frac{D + ND - 2NC}{NC - ND}.$$

$$NC - ND - d(D - NC) \geq 0 \quad \frac{1}{1+r} \geq \frac{NC - ND}{D - NC}$$

$$d \leq \frac{NC - ND}{D - NC} \Leftrightarrow r \geq \frac{D + ND - 2NC}{NC - ND} \quad \begin{aligned} D - NC &\geq (1+r)(NC - ND) \\ D + ND - 2NC &\geq r(NC - ND) \end{aligned}$$

32

Tit for tat strategy

$$D + ND > C + NC \Rightarrow$$

$$\frac{D + ND - 2NC}{NC - ND} > \frac{C - NC}{D - C} > \frac{2C - D - ND}{D - C}$$

$$\frac{D + ND - 2NC}{NC - ND} = \frac{D - NC}{NC - ND} + \frac{ND - NC}{NC - ND} >$$

$$\frac{D - NC}{D - C} - 1 = \frac{C - NC}{D - C}$$

33

Tit for tat strategy

$$D + ND < C + NC \Rightarrow$$

$$\frac{D + ND - 2NC}{NC - ND} < \frac{C - NC}{D - C} < \frac{2C - D - ND}{D - C}$$

C, C, C, \dots D, NC, NC, \dots D, NC, NC, \dots



$$\frac{C - NC}{D - C}$$

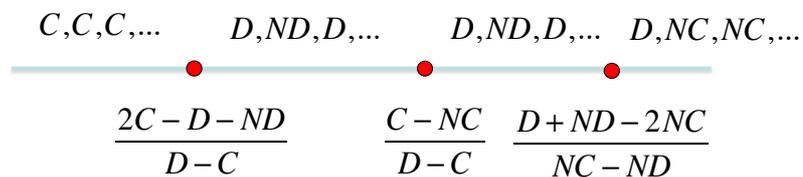
$$\frac{2C - D - ND}{D - C}$$

34

Tit for tat strategy

$$D + ND > C + NC \Rightarrow$$

$$\frac{D + ND - 2NC}{NC - ND} > \frac{C - NC}{D - C} > \frac{2C - D - ND}{D - C}$$



35

La pubblicità

- Le spese per la *pubblicità* (per la *promozione delle vendite*) sono ingenti in molti settori, e si configurano per questa ragione come una scelta strategica da parte delle imprese, talora più rilevante di quella relativa ai prezzi.

36

Una classificazione merceologica

- **Beni di ricerca:** sono quelli le cui caratteristiche rilevanti sono (in linea di principio) accertabili prima del consumo. Es. computer, automobili.
- **Beni d'esperienza:** sono quelli le cui caratteristiche non sono accertabili prima dell'atto del consumo. Es. vino.)

37

Publicità informativa e pubblicità persuasiva

- pubblicità *informativa*, volta a informare dell'esistenza di un prodotto e a descrivere le sue caratteristiche (relativamente ai beni "di ricerca");
- pubblicità *persuasiva*, si propone l'obiettivo di influenzare le preferenze dei consumatori;
- pubblicità come segnale.

38

Pubblicità come segnale

- Molti *spot* pubblicitari vanno ben poco oltre alla mera menzione dell'esistenza del prodotto (o della marca). Tuttavia, il messaggio più importante veicolato è proprio quello che si stanno spendendo molti soldi per fare pubblicità! L'idea è che la mera spesa pubblicitaria **segnali**, nel caso di un bene d'esperienza, che si tratti di un bene di elevata qualità.

39

Pubblicità come segnale

- Un bene può essere prodotto allo stesso costo con due diverse qualità: alta o bassa.
- L'impresa conosce la qualità del proprio prodotto.
- I consumatori sanno solo dell'esistenza delle due qualità: A e B.
- (Informazione asimmetrica)

40

Pubblicità come segnale

- $MC = AC = c$.
- Spesa pubblicitaria in un unico ammontare S .
- La massa dei consumatori è pari a 1.
- Ogni consumatore compra una unità del bene o nessuna.
- Il consumo (e l'acquisto) è ripetuto nel tempo (2 volte).

41

Pubblicità come segnale

- Vi sono due tipi di consumatori (1/2 e 1/2): il primo tipo compra solo se il bene è di qualità A, il secondo è indifferente.
- Le utilità sono:
$$u_1^A = 1 - p; \quad u_1^B = 0 - p; \quad u_1^{NC} = 0$$
$$u_2^A = u_2^B = 1 - p; \quad u_2^{NC} = 0$$
- I consumatori di tipo 1 ripetono l'acquisto solo se verificano la qualità A.

42

Publicità come segnale

- I consumatori credono che senza pubblicità il bene è di qualità B: $\pi = \frac{1}{2}(p - c)$
- I consumatori credono che con una spesa in pubblicità $S \geq S'$ il bene è di qualità A: $\pi = (p - c)$

$$\begin{array}{l} \Pi_B^S = p - c - S + \frac{1}{2}(p - c)\delta \\ \Pi_B^{NS} = \frac{1}{2}(p - c) + \frac{1}{2}(p - c)\delta \end{array} \quad \left| \quad \Pi_B^S \geq \Pi_B^{NS} \Leftrightarrow S \leq \frac{p - c}{2}$$

43

Publicità come segnale

- I consumatori credono che senza pubblicità il bene è di qualità B: $\pi = \frac{1}{2}(p - c)$
- I consumatori credono che con una spesa in pubblicità $S \geq S'$ il bene è di qualità A: $\pi = (p - c)$

$$\begin{array}{l} \Pi_A^S = p - c - S + (p - c)\delta \\ \Pi_A^{NS} = \frac{1}{2}(p - c) + \frac{1}{2}(p - c)\delta \end{array} \quad \left| \quad \Pi_A^S \geq \Pi_A^{NS} \Leftrightarrow S \leq \frac{(p - c)(1 + \delta)}{2}$$

44

Pubblicità come segnale

- All'impresa di qualità A conviene la spesa pubblicitaria S se

$$\frac{p-c}{2} \leq S \leq \frac{(p-c)(1+\delta)}{2}$$