Appunti delle lezioni di istituzioni di matematica attuariale per le assicurazioni sulla vita

Claudio Pacati

anno accademico 2005–06

Indice

1 Le operazioni di assicurazione e la teoria dell'utilità

1.1 L'operazione di assicurazione

Un contratto di assicurazione è un accordo fra due parti, nel quale l'*assicurato* trasferisce all'*assicuratore* un *danno* che può verificarsi in futuro, in cambio di un *premio* che paga alla data di stipula. Il premio è il prezzo che l'assicurato paga per l'eliminazione del rischio che si verifichi il danno.

Considereremo in questa sede una situazione semplificata uniperiodale e solo dal punto di vista dell'assicuratore.

Si assuma che al tempo $t_0 = 0$, data di stipula del contratto, l'assicuratore abbia un capitale proprio certo $c > 0$; sia u la sua funzione di utilità (crescente e concava) e prob la distribuzione di probabilità in base alla quale l'assicuratore attribuisce probabilità agli eventi.

Si assuma che il danno D oggetto del contratto si possa verificare al tempo $t_1 = 1$ e che l'assicurato paghi il premio P al tempo t_0. Il danno è una variabile aleatoria, le cui determinazioni si misurano in unità monetarie; si assumerà che

$$\mathrm{prob}(D \geq 0) = 1 \qquad \text{e che} \qquad \mathrm{prob}(D > 0) > 0 \ . \tag{1}$$

Si osservi che, nel caso D abbia un numero finito di determinazioni con probabilità non nulla (caso finito e discreto), la (1) significa che tutte le determinazioni sono non negative e che almeno una è positiva. Si assumerà inoltre che D sia non degenere, cioè che sia effettivamente aleatoria.

Se si ipotizza per semplicità che l'assicuratore non abbia in corso altri contratti, dopo la stipula del contratto la sua posizione al tempo t_1 sarà

$$Z_1 = (c + P)(1 + I) - D \ , \tag{2}$$

dove I è il rendimento dell'investimento del capitale proprio e del premio per il periodo $[t_0, t_1]$ ed è in generale aleatorio. Poichè prima della stipula la sua posizione t_1 era $c(1 + I)$, la *condizione di indifferenza* per l'assicuratore è che risulti

$$\mathrm{E}_0 \left[u\big((c + P)(1 + I) - D\big)\right] = \mathrm{E}_0 \left[u\big(c(1 + I)\big)\right] \ , \tag{3}$$

essendo E_0 l'aspettativa condizionata all'informazione disponibile al tempo t_0 e calcolata secondo la probabilità prob. Naturalmente, nel caso nella (3) risulti la disuguaglianza "$>$", l'assicuratore percepirà vantaggiosa l'operazione di assicurazione, mentre se dovesse risultare "$<$" la percepirà svantaggiosa.

Per semplicità espositiva si assumerà d'ora in poi che l'assicuratore investa i suoi attivi al tasso di mercato privo di rischio $i > 0$ e che l'aleatorietà del danno D sia indipendente da quella del mercato finanziario. La (3) diventa allora

$$\mathrm{E}_0 \left[u\big((c + P)(1 + i) - D\big)\right] = u\big(c(1 + i)\big) \ , \tag{4}$$

essendo certa la posizione non assicurata.

Si noti che la (4) è strutturalmente diversa dalla *condizione di equità* dello scambio

$$\mathrm{E}_0 \left[(c + P)(1 + i) - D\right] = c(1 + i) \ , \tag{5}$$

che equivale a

$$P = \frac{\mathrm{E}_0\,(D)}{1 + i} \ . \tag{6}$$

La (4) incorpora infatti l'avversione al rischio dell'assicuratore. Per ben noti fatti di teoria dell'utilità è più stringente: se vale la (5) l'assicuratore percepisce svantaggiosa l'operazione. Infatti, se vale la (5) si ottiene che

$$u\left(\mathrm{E}_0\left[(c+P)(1+i)-D\right]\right)=u(c(1+i)) \quad ; \tag{7}$$

per la disuguaglianza di Jensen[1] si ha che

$$u\left(\mathrm{E}_0\left[(c+P)(1+i)-D\right]\right)>\mathrm{E}_0\left[u((c+P)(1+i)-D)\right] \tag{8}$$

e quindi che

$$\mathrm{E}_0\left[u((c+P)(1+i)-D)\right]<u(c(1+i)) \quad , \tag{9}$$

cioè che l'equità dell'operazione ne comporta la svantaggiosità per l'assicuratore. In realtà si può dimostrare un risultato più forte: in ipotesi di mercato assicurativo ideale (che qui non speficheremo) un assicuratore che accetti operazioni eque è destinato a fallire con probabilità 1.

Esempio 1.1.1. Si assuma che il danno D possa assumere una sola determinazione determinazione positiva $d>0$ con probabilità $p>0$ e che sarà quindi nullo con probabilità $1-p$. La (4) assume allora la forma

$$p\,u((c+P)(1+i)-d)+(1-p)\,u((c+P)(1+i))=u(c(1+i)) \quad . \tag{10}$$

La condizione di equità (5) è invece

$$p[(c+P)(1+i)-d]+(1-p)(c+P)(1+i)=c(1+i) \quad , \tag{11}$$

cioè, posto $v=(1+i)^{-1}$,

$$P=p\,d\,v \quad . \quad \square \tag{12}$$

1.2 Il premio equo e il premio puro

Fissato D, la (4) può essere utilizzata per determinare il *premio di indifferenza* P, cioè il premio che rende l'operazione indifferente per l'assicuratore. Si è già osservato che il premio di indifferenza, detto anche *premio puro*, deve essere maggiore del *premio equo*, definito invece dalla (6).

Per determinare il premio puro occorre risolvere la (4) rispetto a P. Si osservi che, fissati c, i e D la funzione

$$f(P)=\mathrm{E}_0\left[u((c+P)(1+i)-D)\right]-u(c(1+i)) \tag{13}$$

è continua, monotona crescente e concava. In particolare è invertibile e l'inversa può essere calcolata con metodi numerici (ad esempio, il metodo di Newton) e, per la concavità, in modo semplice e computazionalmente efficiente. Il premio puro è allora la soluzione dell'equazione $f(P)=0$, cioè $P=f^{-1}(0)$.

Esempio 1.2.1. Se si assume che il danno sia quello dell'esempio 1.1.1 e che la funzione dell'assicuratore sia di tipo esponenziale

$$u(x)=-\mathrm{e}^{-rx} \quad , \qquad \text{con } r>0, \tag{14}$$

il premio puro P si può ricavare in forma chiusa. La (4) diventa infatti

$$-\,p\,\mathrm{e}^{-r\left((c+P)(1+i)-d\right)}-(1-p)\,\mathrm{e}^{-r(c+P)(1+i)}=\mathrm{e}^{-r\,c(1+i)} \quad . \tag{15}$$

[1] *Disuguaglianza di Jensen.* Se $f(x)$ è una funzione concava e X una variabile aleatoria, allora $E[f(X)]\leq f\big(E(X)\big)$ e vale "=" se e solo se X è degenere (certa). $\square$

Cambiando i segni ad ambo i membri e moltiplicando tutto per $e^{r(c+P)(1+i)}$ si ottiene

$$p\,e^{r\,d} + (1-p) = e^{r\,P(1+i)} \quad .$$

Passando ai logaritmi si ha infine

$$P = \frac{1}{r}\log\left[p\,e^{r\,d} + (1-p)\right] v \quad . \tag{16}$$

Poichè la funzione inversa della funzione di utilità esponenziale è

$$u^{-1}(x) = -\frac{1}{r}\log(-x) \quad ,$$

il premio puro è

$$P = u^{-1}\left(\mathrm{E}_0[u(-D)]\right) \quad , \tag{17}$$

cioè l'equivalente certo di $-D$.

Si osservi che, in questo caso, il premio puro non dipende dal capitale proprio dell'assicuratore, ma solo dal danno e dal tasso di interesse non rischioso. Questo fatto, così come l'espressione (17), dipende da una proprietà specifica della funzione di utitlità esponenziale.

Se si considera il caso $c = 1000$, $i = 5\%$, $r = 1/1000$, $d = 100$, $p = 5\%$, il premio equo risulta

$$p\,d\,v = \frac{0.05 \times 100}{1.05} = 4.761905 \quad ,$$

mentre il premio puro è

$$P = 1000\frac{\log\left[0.05 \times e^{\frac{100}{1000}} + 0.95\right]}{1.05} = 4.995017 \quad .$$

Se invece si considera il caso di un danno 5 volte più elevato, cioè se si pone $d = 500$, il premio equo aumenta per un fattore 5

$$p\,d\,v = \frac{0.05 \times 500}{1.05} = 23.809524 \quad ,$$

mentre il premio puro diventa

$$P = 1000\frac{\log\left[0.05 \times e^{\frac{500}{1000}} + 0.95\right]}{1.05} = 30.401067 \quad ,$$

aumentando quindi per un fattore di oltre 6. □

Esempio 1.2.2. Si consideri la situazione dell'esempio 1.2.1, ma si assuma che l'assicuratore abbia funzione di utilità esponenziale

$$u(x) = \log(x) \quad .$$

La (4) diventa

$$p\,\log\big((c+P)(1+i) - d\big) + (1-p)\,\log\big((c+P)(1+i)\big) = \log\big(c(1+i)\big) \quad .$$

e può essere risolta rispetto a P per via numerica. Se si considera ancora il caso di $c = 1000$, $i = 5\%$, $d = 100$, $p = 5\%$ il premio puro che si ottiene è $P = 4.990456$, mentre nel caso di danno 5 volte maggiore si ha $P = 31.448697$. Si noti che se il capitale prorpio fosse $c = 2000$, il premio puro dei due contratti sarebbe rispettivamente $P = 4.872791$ e $P = 26.958682$. □

1.3 Il caricamento di sicurezza e le basi tecniche del I ordine

La differenza fra il premio puro e il premio equo

$$L = P - \mathrm{E}_0[D]v \tag{18}$$

è positiva e prende il nome di *caricamento di sicurezza*. Quantifica in unità monetarie al tempo t_0 l'avversione dell'assicuratore al rischio insito nell'operazione di assicurazione del danno D. La terminologia deriva dal fatto, già richiamato, che l'assicuratore non può praticare premi equi, altrimenti fallirebbe: deve quindi essere *prudente*, caricando i premi con il caricamento di sicurezza.

Il caricamento di sicurezza si esprime spesso in percentuale del premio puro, come *tasso di caricamento di sicurezza*

$$\ell = \frac{L}{P} \quad . \tag{19}$$

È un *caricamento implicito*, che l'assicuratore non è tenuto a dichiarare all'assicurato, diversamente dal *caricamento per spese*, che invece deve essere normalmente dichiarato all'assicurato.

Per considerare correttamente la propria avversione al rischio nel calcolare i premi l'assicuratore deve rinunciare alla semplicità di calcolo del premio equo. Come visto nel paragrafo 1.2, infatti, e tranne in casi particolari (come nell'esempio 1.2.1) il calcolo del premio puro deve essere condotto per via numerica e non ammette espressione in forma chiusa. Per ovviare a questo inconveniente si ricorre spesso alla logica della *base tecnica del I ordine*, distorcendo la misura di probabilità e il tasso di interesse per incorporarvi l'avversione al rischio dell'assicuratore. Formalmente, si definisce base tecnica del I ordine ogni coppia $(\mathrm{prob}^{\mathrm{I}}, i^{\mathrm{I}})$ di misura di probabilità e di tasso di interesse tali che il premio equo calcolato con $(\mathrm{prob}^{\mathrm{I}}, i^{\mathrm{I}})$ risulti uguale al premio puro P. Se si indica con E^{I} l'aspettativa calcolata con la misura di probabilità $\mathrm{prob}^{\mathrm{I}}$ ciò significa che

$$\mathrm{E}_0^{\mathrm{I}}(D)(1+i^{\mathrm{I}})^{-1} = P = \mathrm{E}_0(D)(1+i)^{-1} + L \quad . \tag{20}$$

In generale la base tecnica del I ordine non è unica. Il tasso di interesse del I ordine i^{I}, detto anche *tasso tecnico* è solitamente non negativo e minore-uguale del tasso di mercato i, mentre la distribuzione di probabilità $\mathrm{prob}^{\mathrm{I}}$ assegna probabilità maggiori di prob al verificarsi del danno D. Per questo motivo la base tecnica del I ordine viene anche detta *base tecnica prudenziale*.

Esempio 1.3.1. Proseguendo l'esempio 1.2.1, nel caso $d = 100$ si ha un caricamento di sicurezza

$$L = P - \mathrm{E}_0[D]v = 4.995017 - 4.761905 = 0.233112 \quad ,$$

che corrisponde ad un tasso di caricamento

$$\ell = \frac{L}{P} = \frac{0.233112}{4.995017} = 4.6669\% \quad .$$

Ogni base tecnica del I ordine $(p^{\mathrm{I}}, i^{\mathrm{I}})$ deve soddisfare l'equazione

$$p^{\mathrm{I}}\,(1+i^{\mathrm{I}})^{-1} = P \quad .$$

Se, per esempio, si sceglie $i^{\mathrm{I}} = i$, la probabilità del I ordine p^{I} è univocamente determinata e risulta

$$p^{\mathrm{I}} = \frac{P(1+i)}{d} = \frac{4.995017 \times 1.05}{100} = 5.2448\% \quad .$$

Se invece si pone $p^{\mathrm{I}} = p$, il tasso tecnico i^{I} è univocamente determinato da

$$i^{\mathrm{I}} = \frac{p\,d}{P} - 1 = \frac{0.05 \times 100}{4.995017} - 1 = 0.0998\% \ .$$

Nel caso invece di $d = 500$ si ottiene $L = 6.591543$ e $\ell = 21.6819\%$. Se si fissa il tasso tecnico i^{I} al livello del tasso di mercato i, si ottiene $p^{\mathrm{I}} = 6.3842\%$. Se invece si fissa la probabilità del I ordine, ad esempio al livello $p^{\mathrm{I}} = 6.2\%$, si ottiene un tasso tecnico $i^{\mathrm{I}} = 1.9701\%$.

1.4 La riserva matematica

La *riserva matematica* di un contratto di assicurazione è l'importo monetario che l'assicuratore deve immobilizzare a fronte dell'impegno nei confronti dell'assicurato. In base a quanto visto nel paragrafo 1.1, nello schema uniperiodale considerato essa coincide con il premio puro. Detto in altri termini, la riserva matematica è il *valore atteso scontato* della prestazione, calcolato con la base tecnica del I ordine.

Si noti che l'appostamento della riserva matematica non garantisce la solvibilità dell'assicuratore. Essa è infatti determinata in base alla prudenzialità, cioè all'avversione al rischio, dell'assicuratore. Il regolamentatore tipicamente richiede un'ulteriore immobilizzazione di capitale per garantire la solvibilità del contratto, il *margine di solvibilità*.

2 Il modello probabilistico "tradizionale" per la durata della vita umana

2.1 Durata della vita alla nascita

Si consideri un individuo con età $x = 0$ (alla nascita) e sia T_0 la durata della sua vita in anni, che sarà assunta una variabile aleatoria a valori reali e positivi.

Nella modellistica si considera sia la possibilità che T_0 illimitata superiormente sia il caso, più frequente nella pratica, che ci sia un'età massima raggiungibile, che viene indicata solitamente con $\omega > 0$. Per trattare contemporaneamente i due casi, supporremo che ω sia fissato, eventualmente a $+\infty$, e che $T_0 \leq \omega$.

Sia $F_0(t) = \text{prob}(T_0 \leq t)$ la funzione di ripartizione della variabile aleatoria T_0.

La *funzione di sopravvivenza* è la funzione di ripartizione complementare:

$$S(t) = \text{prob}(T_0 > t) = 1 - F_0(t) \ . \tag{21}$$

Risulta

$$F_0(0) = 0 \ , \qquad \lim_{t \to \omega} F_0(t) = 1 \ , \tag{22}$$

$$S(0) = 1 \ , \qquad \lim_{t \to \omega} S(t) = 0 \ . \tag{23}$$

La figura 1 riporta in forma grafica un esempio concreto di funzione di ripartizione e della conseguente funzione di sopravvivenza in uso nella pratica attuariale italiana.

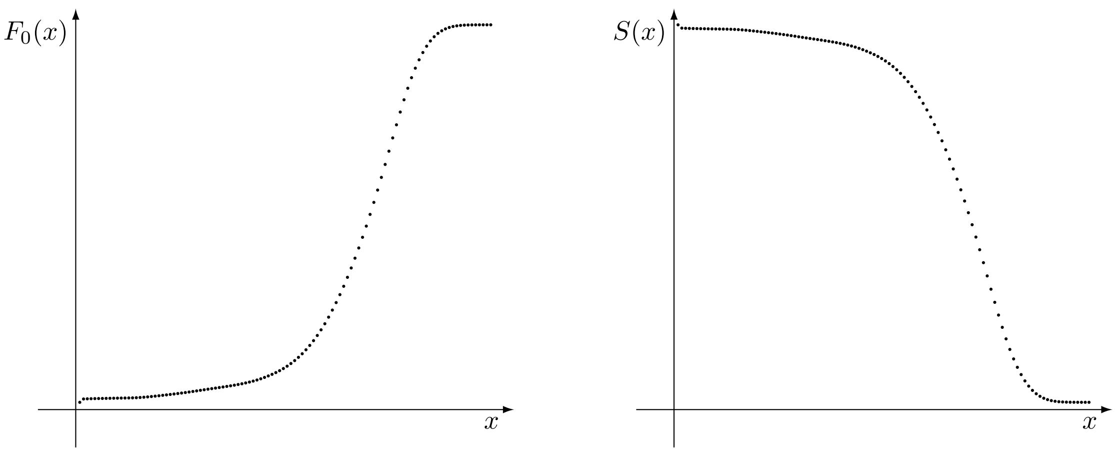

Figura 1: Funzione di ripartizione e funzione di sopravvivenza

2.2 Durata della vita ad età x

Si consideri un individuo con età $x \geq 0$ e sia T_x la durata residua della sua vita. Per definizione è

$$T_x = T_0 - x \,|\, T_0 > x = \begin{cases} T_0 - x & \text{se } T_0 > x, \\ \text{non definita} & \text{se } T_0 \leq x. \end{cases} \tag{24}$$

La funzione di ripartizione è pertanto

$$F_x(t) = \text{prob}(T_x \leq t) = \text{prob}(T_0 \leq x + t \,|\, T_0 > x) \ . \tag{25}$$

Usando il teorema di Bayes[2] si ha che

$$F_x(t) = \frac{\text{prob}(x < T_0 \le x+t)}{\text{prob}(T_0 > x)} \tag{26}$$
$$= \frac{F_0(x+t) - F_0(x)}{1 - F_0(x)} \tag{27}$$
$$= \frac{S(x) - S(x+t)}{S(x)} \tag{28}$$
$$= 1 - \frac{S(x+t)}{S(x)} \quad . \tag{29}$$

Nel modello probabilistico tradizionale (o “standard”) la distribuzione di probabilità della vita residua di un individuo è completamente dalla funzione di sopravvivenza S, che è fissata “alla nascita”. Non si considera la possibilità che avvengano delle innovazioni successive.

La grandezza

$$\omega_x = \begin{cases} \omega - x & \text{se } \omega < +\infty, \\ +\infty & \text{se } \omega = +\infty, \end{cases} \tag{30}$$

è il limite superiore alla durata residua della vita di un individuo di età x.

2.3 Notazioni attuariali

Per un individuo di età x anni e in riferimento ad una durata t anno si usano le seguenti notazioni abbreviate:

$$_tq_x = F_x(t) = 1 - \frac{S(x+t)}{S(x)} \qquad \text{prob. di morte in } t \text{ anni,} \tag{31}$$
$$q_x = {}_1q_x \quad , \tag{32}$$
$$_tp_x = 1 - {}_tq_x = \frac{S(x+t)}{S(x)} \qquad \text{prob. di essere in vita dopo } t \text{ anni,} \tag{33}$$
$$p_x = {}_1p_x \quad . \tag{34}$$

Se si considerano poi due durate t_1 e t_2, la probabilità di morte in t_2 anni, differita di t_1 anni è definita da:

$$_{t_1|t_2}q_x = \text{prob}(t_1 < T_x \le t_1 + t_2) \tag{35}$$
$$= F_x(t_1 + t_2) - F_x(t_1) \tag{36}$$
$$= 1 - \frac{S(x+t_1+t_2)}{S(x)} - \left[1 - \frac{S(x+t_1)}{S(x)}\right] \tag{37}$$
$$= \frac{S(x+t_1) - S(x+t_1+t_2)}{S(x)} \quad . \tag{38}$$

Si noti che, per definizione,

$$_{0|t}q_x = {}_tq_x \quad . \tag{39}$$

[2] *Teorema di Bayes.* Dati due eventi A e B con $\text{prob}(B) \neq 0$, la probabiltà di A condizionata a B può essere espressa nella forma

$$\text{prob}(A \mid B) = \frac{\text{prob}(A \cap B)}{\text{prob}(B)} \quad . \quad \square$$

Se t è intero valgono le seguenti relazioni notevoli, di verifica diretta:

$$
\begin{aligned}
{}_tp_x &= p_x \cdot p_{x+1} \cdot \ldots \cdot p_{x+t-1} \quad , &(40)\\
{}_tp_x &= (1-q_x)\,(1-q_{x+1}) \cdot \ldots \cdot (1-q_{x+t-1}) \quad , &(41)\\
{}_{t_1+t_2}p_x &= {}_{t_1}p_x \; {}_{t_2}p_{x+t_1} \quad , &(42)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_tq_x &= 1 - {}_tp_x = 1 - p_x \cdot p_{x+1} \cdot \ldots \cdot p_{x+t-1} \quad , &(43)\\
{}_tq_x &= 1 - (1-q_x)\,(1-q_{x+1}) \cdot \ldots \cdot (1-q_{x+t-1}) \quad , &(44)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_{t_1|t_2}q_x &= {}_{t_1}p_x - {}_{t_1+t_2}p_x \quad , &(45)\\
{}_{t_1|t_2}q_x &= {}_{t_1+t_2}q_x - {}_{t_1}q_x \quad , &(46)\\
{}_{t_1|t_2}q_x &= {}_{t_1}p_x \cdot {}_{t_2}q_{x+t_1} \quad , &(47)
\end{aligned}
$$

$$
{}_tp_x = 1 - \sum_{k=1}^{t} {}_{k-1|1}q_x \quad . \tag{48}
$$

La (47) può essere generalizzata considerando una durata t_0 con $0 \le t_0 \le t_1$:

$$
{}_{t_1|t_2}q_x = {}_{t_0}p_x \cdot {}_{t_1-t_0|t_2}q_{x+t_0} \quad . \tag{49}
$$

Le relazioni precedenti mostrano come la distribuzione di probabilità della vita residua di un individuo è completamente determinata dalla successione delle p_x o delle q_x. Se per semplicità si considerano solo età e durate intere, la funzione di sopravvivenza $S(x)$ è completamente determinata dall'equazione ricorrente

$$
\begin{aligned}
S(0) &= 1 \quad , &(50)\\
S(x+1) &= S(x)p_x = S(x)(1-q_x) \quad . &(51)
\end{aligned}
$$

Per concludere, per le notazioni attuariali valgono le seguenti relazioni al contorno:

$$
\begin{aligned}
{}_0p_x &= 1 \quad , & \lim_{t\to\omega_x} {}_tp_x &= 0 \quad , &(52)\\
{}_0q_x &= 0 \quad , & \lim_{t\to\omega_x} {}_tq_x &= 1 \quad , &(53)\\
\sum_{n=t+1}^{\omega_x} {}_{n-1|1}q_x &= {}_tp_x \quad , & \sum_{n=1}^{\omega_x} {}_{n-1|1}q_x &= 1 \quad . &(54)
\end{aligned}
$$

2.4 Tavole di sopravvivenza

Si consideri una collettività di L_α persone coetanee di età α. Si supponga che:

1. la collettività sia chiusa a nuovi ingressi (è quindi una *generazione*),
2. l'unica causa di uscita sia il decesso,
3. tutte le persone della collettività abbiano la stessa funzione di sopravvivenza S^α.

Per $j = 1, 2, \ldots, L_\alpha$ sia T_α^j la durata della vita residua (aleatoria) dell'individuo j. Si fissi $x \ge \alpha$ e consideri l'evento $\mathcal{E}_{\alpha,x}^j = \{T_\alpha^j > x - \alpha\}$ (l'individuo j raggiunge l'età x) e sia

$$
I_{\alpha,x}^j = \mathbf{1}_{\mathcal{E}_{\alpha,x}^j} = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathcal{E}_{\alpha,x}^j, \\ 0 & \text{se non } \mathcal{E}_{\alpha,x}^j \end{cases} \tag{55}
$$

la funzione indicatrice dell'evento $\mathcal{E}^j_{\alpha,x}$. Risulta

$$\mathrm{E}(I^j_{\alpha,x}) = \mathrm{prob}(\mathcal{E}^j_{\alpha,x}) = \frac{S^\alpha(x)}{S^\alpha(x-\alpha)} = {}_{x-\alpha}p_\alpha \quad . \tag{56}$$

Per ogni $x \geq \alpha$ si indichi con L^α_x il numero dei sopravviventi all'età x (fra gli L_α iniziali). Si ha che

$$L^\alpha_x = \sum_{j=1}^{L_\alpha} I^j_{\alpha,x} \quad . \tag{57}$$

Se ${}_tD^\alpha_x$ è il numero di decessi nella generazione fra le età x e $x+t$ si ha che

$${}_tD^\alpha_x = L^\alpha_x - L^\alpha_{x+t} \quad . \tag{58}$$

Risulta che

$$\mathrm{E}(L^\alpha_x) = \mathrm{E}\left(\sum_{j=1}^{L_\alpha} I^j_{\alpha,x}\right) = \sum_{j=1}^{L_\alpha} \mathrm{E}\left(I^j_{\alpha,x}\right) = \sum_{j=1}^{L_\alpha} \mathrm{prob}(\mathcal{E}^j_{\alpha,x}) = L_\alpha \cdot {}_{x-\alpha}p_\alpha \quad , \tag{59}$$

$$\mathrm{E}({}_tD^\alpha_x) = \mathrm{E}(L^\alpha_x) - \mathrm{E}(L^\alpha_{x+t}) = L_\alpha({}_{x-\alpha}p_\alpha - {}_{x+t-\alpha}p_\alpha) = L_\alpha \cdot {}_{x-\alpha|t}q_\alpha \quad . \tag{60}$$

In particolare la conoscenza di $\mathrm{E}(L^\alpha_x)$ per ogni $x > \alpha$ permette pertanto di calcolare tutte le probabilità di sopravvivenza del tipo ${}_{x-\alpha}p_\alpha$ e quindi di ricostruire la funzione di sopravvivenza per $x \geq \alpha$, dato che ${}_{x-\alpha}p_\alpha = S^\alpha(x)/S^\alpha(\alpha)$.

La tavola di sopravvivenza come modello probabilistico (a tempo discreto) è basata su questo fatto e riporta per ogni generazione α i valori di

$$\ell^\alpha_x = \mathrm{E}(L^\alpha_x) \quad . \tag{61}$$

Spesso la tavola è svincolata dalla generazione e riporta un'unica colonna di valori ("medi") che vale per tutte le generazioni. La radice della tavola è $\ell_0 = L_0$ e viene solitamente posto ad un valore convenzionale (tipicamente 100 000).

Le grandezze attuariali possono essere calcolate direttamente dalla tavola secondo le relazioni

$${}_tp_x = \frac{\ell_{x+t}}{\ell_x} \quad , \tag{62}$$

$${}_tq_x = \frac{\ell_x - \ell_{x+t}}{\ell_x} \quad , \tag{63}$$

$${}_{t_1|t_2}q_x = \frac{\ell_{x+t_1} - \ell_{x+t_1+t_2}}{\ell_x} \quad . \tag{64}$$

Il numero atteso di decessi fra le età x e $x+t$ si indica con ${}_td_x$ e risulta

$${}_td_x = \ell_x - \ell_{x+t} \quad . \tag{65}$$

Esempi di calcolo con le tavole italiane SIM e SIF sono nella cartella Excel `lab1.xls`.

3 Le polizze tradizionali non rivalutabili

3.1 La legge di equivalenza intertemporale finanziario-attuariale "tradizionale"

Nell'approccio attuariale "tradizionale" si considera una legge di equivalenza intertemporale basata su

- una *legge esponenziale* con tasso annuo $i \geq 0$ fissato (*tasso tecnico*, *ipotesi finanziaria*);
- un modello probabilistico "tradizionale" basato su una *funzione di sopravvivenza* S fissata (*ipotesi demografica*).

La coppia (i, S), che determina completamente la legge di equivalenza intertemporale, viene chiamata *base tecnica*.

Fissata una base tecnica (i, S), un istante di valutazione t, un importo X_s pagabile in $s \geq t$ e legato alla durata della vita di un individuo, il *valore attuale attuariale* $V(t, S_s)$ è il valore in t di X_s calcolato secondo la base tecnica (i, S):

$$V(t, X_s) = \mathrm{E}_t(X_s)\, v^{s-t} \quad , \tag{66}$$

dove $v = (1+i)^{-1}$ è il fattore di sconto annuo della legge esponenziale di tasso annuo i.

Osservazione 3.1.1. In base a quanto visto nel paragrafo 1.2, se (i, S) è una base tecnica del I ordine il valore $V(t, X_s)$ calcolato secondo (i, S) è il premio (unico) puro in t del contratto che paga X_s in s. Se invece l'ipotesi demografica riflette le opinioni probabilistiche dell'assicuratore e la legge esponenziale di tasso annuo i è allineata con la legge di equivalenza finanziaria in vigore sul mercato al tempo t, il valore coincide con il premio (unico) equo. □

3.2 Classificazione in base alla tipologia di prestazioni

Fissata una base tecnica (i, S), si consideri un individuo di età x anni che stipula una polizza al tempo $t = 0$.

3.2.1 Prestazioni di capitale

Capitale differito. La prestazione di *capitale differito* (CD) con durata n prevede il pagamento di un capitale assicurato C dopo n anni, a condizione che l'assicurato sia in vita a quella data. La durata n viene chiamata anche *differimento*.

La prestazione aleatoria pagata dalla polizza al tempo n è quindi

$$Y_n = \begin{cases} C & \text{se l'assicurato sarà in vita in } n, \text{ cioè se } T_x > n, \\ 0 & \text{altrimenti;} \end{cases} \tag{67}$$

l'aleatorietà della prestazione riguarda il pagamento o meno della prestazione che, se verrà pagata, sarà comunque C.

Se si indica con $\mathbf{1}_{\{T_x > n\}}$ la funzione indicatrice[3] dell'evento $\{T_x > n\}$, la prestazione contrattualmente prevista può essere scritta nella forma

$$Y_n = C\, \mathbf{1}_{\{T_x > n\}} \quad . \tag{68}$$

e può essere pertanto vista come un contratto di tipo zero-coupon, con pagamento aleatorio.

[3] La funzione indicatrice dell'evento A è una variabile aleatoria che varrà 1 se A risulterà vero, 0 altrimenti; risulta inotre che $\mathrm{E}(\mathbf{1}_A) = \mathrm{prob}(A)$.

Nel modello tradizionale il valore all'emissione della prestazione risulta essere

$$V(0,Y_n) = C\,V(0,\mathbf{1}_{\{T_x>n\}}) = C\,v^n \mathrm{E}_0\left(\mathbf{1}_{\{T_x>n\}}\right) = C\,v^n \mathrm{prob}(T_x > n) = C\,v^n\,{}_np_x \ . \tag{69}$$

Viene spesso usata la notazione

$${}_n\mathrm{E}_x = v^n\,{}_np_x \tag{70}$$

per indicare il valore di una prestazione di capitale differito unitario dopo n anni riferito ad una testa di età corrente x. In base a questa notazione si ha quindi

$$V(0,Y_n) = C\,{}_n\mathrm{E}_x \ . \tag{71}$$

Temporanea caso morte. Una polizza *temporanea caso morte* (TCM) di durata n anni prevede il pagamento di un capitale assicurato C alla data del decesso dell'assicurato, qualora questo si verifichi entro n anni dalla stipula.

La prestazione assicurata è quindi prevista alla data T_x, può essere scritta nella forma

$$Y_{T_x} = \begin{cases} C & \text{se } T_x \le n, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{72}$$

ed è quindi caratterizzata da una data di pagamento aletaoria, oltre che dall'aleatorietà del pagamento stesso, che potrebbe non esserci se l'assicurato sarà in vita alla scadenza.

Nel modello tradizionale si assume per semplicità che l'assicurato possa morire solo a tempi interi, cioè che le possibili determinazioni di T_x siano numeri interi e positivi.[4] La prestazione contrattuale può essere allora descritta come un vettore di pagamenti aletori $\boldsymbol{Y} = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$ ai tempi $\boldsymbol{t} = \{1, 2, \ldots, n\}$, dove per ogni $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$

$$Y_k = \begin{cases} C & \text{se } T_x = k, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{73}$$

$$= C\,\mathbf{1}_{\{T_x=k\}} = C\,\mathbf{1}_{\{k-1<T_x\le k\}} \ . \tag{74}$$

Si osservi infatti che l'ipotesi semplificatrice comporta che $\{T_x = k\} = \{k-1 < T_x \le k\}$. La prestazione può quindi essere vista come un portafoglio di contratti zero-coupon aleatorî.

Nel modello tradizionale il valore alla stipula dello zero-coupon in scadenza in k è dato da

$$V(0,Y_k) = C\,V(0,\mathbf{1}_{\{k-1<T_x\le k\}}) = C\,v^k \mathrm{prob}(k-1 < T_x \le k) = C\,v^k\,{}_{k-1|1}q_x \ . \tag{75}$$

Il valore delle prestazioni complessivamente previste dalla polizza è quindi

$$V(0,\boldsymbol{Y}) = \sum_{k=1}^{n} V(0,Y_k) = C \sum_{k=1}^{n} v^k\,{}_{k-1|1}q_x \ . \tag{76}$$

Viene spesso usata la notazione

$${}_n\mathrm{A}_x = \sum_{k=1}^{n} v^k\,{}_{k-1|1}q_x \tag{77}$$

per indicare il valore della prestazione temporanea caso morte con capitale assicurato unitario. Si noti che se $i = 0$ risulta ${}_n\mathrm{A}_x = {}_nq_x$.

[4] Si osservi che, poiché si è posta convenzionalmente a zero la data di stipula contrattuale, i tempi interi coincidono con le ricorrenze anniversarie della stipula.

Temporanea caso morte con capitale assicurato variabile. Una variante della TCM è la TCM con capitale assicurato variabile in modo prefissato. Per ogni anno k è definito contrattualmente uno specifico capitale assicurato C_k e la prestazione prevista per il tempo k è

$$Y_k = C_k \, \mathbf{1}_{\{k-1<T_x\le k\}} \quad .$$

Il valore alla stipula della prestazione è quindi

$$V(0,\boldsymbol{Y}) = \sum_{k=1}^{n} C_k \, v^k \, {}_{k-1|1}q_x \quad . \tag{78}$$

Un esempio tipico è quello di polizza con capitale assicurato decrescente linearmente: fissato il capitale assicurato C_1, si ha

$$\begin{aligned}
C_2 &= C_1 - \frac{1}{n}C_1 &&= \frac{n-1}{n}C_1 \quad ,\\
C_3 &= C_2 - \frac{1}{n}C_1 &&= \frac{n-2}{n}C_1 \quad ,\\
&\dots\\
C_n &= C_{n-1} - \frac{1}{n}C_1 = \frac{1}{n}C_1 \quad .
\end{aligned}$$

Un altro esempio tipico, diffuso soprattutto nelle compagnie di bancassicurazione, è quello dove il capitale assicurato decresce come il debito residuo di un mutuo sottoscritto dall'assicurato. In questo caso, normalmente, il *beneficiario* della prestazione è il mutuante, che tipicamente impacchetta la polizza assieme al mutuo in un unico prodotto, per tutelarsi contro il rischio che la morte del mutuatario possa interrompere l'ammortamento del debito.

Vita intera. Una polizza di *vita intera* è il caso limite della polizza temporanea caso morte, con durata $n = \omega_x$. L'aleatorietà del contratto riguarda quindi solo la data di pagamento: l'assicuratore dovrà comunque pagare, prima o poi, il capitale assicurato. Si possono ripetere tutte le considerazioni svolte nella sezione precedente e la notazione in uso per il valore di una vita intera con capitale assicurato unitario è

$$\mathrm{A}_x = \sum_{k=1}^{\omega_x} v^k \, {}_{k-1|1}q_x \quad . \tag{79}$$

Osservazione 3.2.1. Nel caso $i = 0$ risulta

$$\mathrm{A}_x = \sum_{k=1}^{\omega_x} {}_{k-1|1}q_x = 1 \tag{80}$$

e il valore della vita intera non dipende dall'ipotesi demografica e coincide con il capitale assicurato. □

Osservazione 3.2.2. Se la base tecnica demografica prevede che $\omega_x = +\infty$, il termine destro della (79) è una serie numerica a termini non negativi. Poiché il termine generale della serie è $v^k \, {}_{k-1|1}q_x \le {}_{k-1|1}q_x$ e poiché nel caso $i = 0$ si ha $\mathrm{A}_x = 1$, la serie converge ad una somma minore o uguale a 1. Il valore della vita intera dipende quindi sia dal tasso tecnico che dalla base tecnica demografica. □

Mista. Una polizza *mista* di durata n anni paga il capitale assicurato C sia in caso di vita a scadenza che alla data del decesso, se questo avviene entro la scadenza. Può pertanto essere vista come un portafoglio di due polizze: una capitale differito e un temporanea caso morte con lo stesso capitale assicurato. Unendo i risultati ottenuti nelle sezioni dedicate alle due componenti possiamo descrivere le prestazioni della polizza mista come un vettore $\boldsymbol{Y} = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$ ai tempi $\boldsymbol{t} = \{1, 2, \ldots, n\}$, dove per ogni $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ si ha

$$Y_k = \begin{cases} C & \text{se } k-1 < T_x \leq k \text{ (prestazione caso morte in } k \\ C & \text{se } k = n \text{ e } T_x > n \text{ (prestazione caso vita a scadenza),} \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \tag{81}$$

il cui valore è la somma dei valori delle due componenti:

$$V(0, \boldsymbol{Y}) = C\,({}_n\mathrm{E}_x + {}_n\mathrm{A}_x) \quad . \tag{82}$$

Come nel caso della vita intera, anche nella polizza mista l'aleatorietà del contratto riguarda la data di pagamento della prestazione e non l'importo: l'assicuratore ha la certezza di dovere corrispondere la prestazione ma non se alla scadenza (caso vita) o prima (caso premorienza).

Osservazione 3.2.3. Nel caso di tasso tecnico nullo $i = 0$ si ha che

$${}_n\mathrm{E}_x + {}_n\mathrm{A}_x = 1 \tag{83}$$

e il valore della mista non dipende dalla base demografica e coincide con il capitale assicurato. □

Polizza mista con capitale assicurato vita e morte differenti. Una variante della polizza mista è la polizza mista con capitale assicurato caso vita C^{v} diverso dal capitale assicurato caso morte C^{m}. Il vettore delle prestazioni contrattualmente previste per questa polizza è

$$Y_k = \begin{cases} C^{\mathrm{m}} & \text{se } k-1 < T_x \leq k, \\ C^{\mathrm{v}} & \text{se } k = n \text{ e } T_x > n, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{84}$$

e il valore della polizza è

$$V(0, \boldsymbol{Y}) = C^{\mathrm{v}}\,{}_n\mathrm{E}_x + C^{\mathrm{m}}\,{}_n\mathrm{A}_x \quad . \tag{85}$$

Naturalmente si possono operare le scomposizioni

$$V(0, \boldsymbol{Y}) = C^{\mathrm{v}}\,({}_n\mathrm{E}_x + {}_n\mathrm{A}_x) + (C^{\mathrm{m}} - C^{\mathrm{v}})\,{}_n\mathrm{A}_x \tag{86}$$

e

$$V(0, \boldsymbol{Y}) = C^{\mathrm{m}}\,({}_n\mathrm{E}_x + {}_n\mathrm{A}_x) + (C^{\mathrm{v}} - C^{\mathrm{m}})\,{}_n\mathrm{E}_x \quad . \tag{87}$$

La prima, che è interessante soprattutto nel caso $C^{\mathrm{m}} > C^{\mathrm{v}}$, sottintende la scomposizione del contratto in un portafoglio di una mista normale, con capitale assicurato C^{v}, e una TCM, con capitale assicurato $C^{\mathrm{m}} - C^{\mathrm{v}}$. La seconda, significativa soprattutto nel caso $C^{\mathrm{v}} > C^{\mathrm{m}}$, sottintende la scomposizione in una mista normale, con capitale assicurato C^{m}, più un capitale differito, con capitale assicurato $C^{\mathrm{v}} - C^{\mathrm{m}}$.

Capitalizzazione. Un contratto di capitalizzazione di durata n prevede che al contraente venga pagato a scadenza un capitale C con certezza, indipendentemente quindi dalla durata della sua (o di altrui) vita. Tecnicamente non è quindi un contratto di assicurazione. Non lo è nemmeno giuridicamente, anche se la normativa lo prevede come una forma contrattuale che per essere commercializzata ha bisogno di una particolare autorizzazione, che è inclusa nella più restrittiva autorizzazione a vendere contratti di assicurazione del ramo vita.

Il valore alla data di stipula del contratto è ovviamente

$$V(0, C_n) = C\, v^n \quad .$$

Termine fisso. La polizza a *termine fisso* è simile alla polizza mista, con l'unica differenza che la prestazione caso morte, anziché essere pagata alla data del decesso dell'assicurato, viene pagata alla scadenza n della polizza. Se facciamo riferimento ad una polizza con capitale assicurato caso vita C^{v} e capitale assicurato caso morte C^{m}, il contratto prevede un'unica prestazione Y_n al tempo n, definita da

$$Y_n = \begin{cases} C^{\mathrm{v}} & \text{se } T_x > n, \\ C^{\mathrm{m}} & \text{se } T_x \leq n \end{cases} \tag{88}$$

$$= C^{\mathrm{v}} \mathbf{1}_{\{T_x > n\}} + C^{\mathrm{m}} \mathbf{1}_{\{T_x \leq n\}} \quad . \tag{89}$$

Vi è quindi incertezza nell'importo della prestazione, che però verrà corrisposta con certezza alla scadenza.

Poiché

$$\mathrm{E}_0 \left(\mathbf{1}_{\{T_x > n\}} \right) = \mathrm{prob}(T_x > n) = {}_n p_x = 1 - {}_n q_x \quad , \tag{90}$$

$$\mathrm{E}_0 \left(\mathbf{1}_{\{T_x \leq n\}} \right) = \mathrm{prob}(T_x \leq n) = {}_n q_x = 1 - {}_n p_x \quad , \tag{91}$$

il valore della prestazione è

$$V(0, Y_n) = C^{\mathrm{v}} v^n {}_n p_x + C^{\mathrm{m}} v^n {}_n q_x \tag{92}$$

e può essere scritto nella forma

$$V(0, Y_n) = C^{\mathrm{m}} v^n + (C^{\mathrm{v}} - C^{\mathrm{m}})_n \mathrm{E}_x \quad , \tag{93}$$

che fa riferimento alla scomposizione della termine fisso in un portafoglio di una capitalizzazione, con capitale a scadenza C^{v}, più un capitale differito che integra (algebricamente) la prestazione nel caso di vita a scadenza. Naturalmente si può alternativamente operare la scomposizione del valore

$$V(0, Y_n) = C^{\mathrm{v}} v^n + (C^{\mathrm{m}} - C^{\mathrm{v}}) v^n {}_n q_x \quad , \tag{94}$$

che fa riferimento alla scomposizione della termine fisso in una capitalizzazione che paga C^{v} più un contratto che prevede l'integrazione (in senso algebrico) di $C^{\mathrm{m}} - C^{\mathrm{v}}$ a scadenza in caso di premorienza. Naturalmente, nel caso $C^{\mathrm{v}} = C^{\mathrm{m}}$ la polizza "degenera" in una capitalizzazione.

3.2.2 Prestazioni di rendita vitalizia

Una *rendita vitalizia* è una prestazione che prevede il pagamento periodico di un importo monetario a patto che l'assicurato sia in vita; non è prevista nessuna prestazione in caso di decesso dell'assicurato. Nel seguito faremo riferimento soltanto al caso di periodicità annuale e rata costante R.[5]

Una rendita vitalizia può essere *temporanea*, quando la prestazione si esaurisce dopo un certo numero di anni. Come nel caso delle *rendite certe* (non subordinate alla durata della vita dell'assicurato), le rendite vitalizie possono essere *anticipate*, quando ciascuna rata è pagata all'inizio dell'anno di riferimento, o *posticipate*, quando la rata è pagata a fine anno.

Rendita vitalizia immediata. La rendita vitalizia è *immediata* quando inzia alla data di stipula. Indicando con Y_k il vettore il pagamento contrattualmente previsto al tempo k.

Rendita vitalizia immediata posticipata. Risulta che per ogni $k > 0$

$$Y_k = R\,\mathbf{1}_{\{T_x > k\}} \tag{95}$$

e il valore alla stipula è quindi

$$V(0, \boldsymbol{Y}) = R\,\mathrm{a}_x \quad , \tag{96}$$

dove

$$\mathrm{a}_x = \sum_{k=1}^{\omega_x} v^k\,{}_kp_x \quad . \tag{97}$$

Rendita vitalizia immediata anticipata. In questo caso le rate sono pagate a inizio anno. La prestazione al tempo $k > 0$ è ancora espressa dalla (95) e si aggiunge la prestazione (certa) alla stipula $Y_0 = R$. Il valore della rendita è

$$V(0, \boldsymbol{Y}) = R\,\ddot{\mathrm{a}}_x \quad , \tag{98}$$

dove

$$\ddot{\mathrm{a}}_x = \sum_{k=0}^{\omega_x} v^k\,{}_kp_x = 1 + \mathrm{a}_x \quad . \tag{99}$$

Rendite temporanee. Se n è la *durata* della rendita vitalizia immediata, nel caso posticipato si ha

$$Y_k = \begin{cases} R\,\mathbf{1}_{\{T_x > k\}} & \text{se } 0 < k \leq n, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{100}$$

e il valore è

$$V(0, \boldsymbol{Y}) = R\,{}_n\mathrm{a}_x \quad , \tag{101}$$

dove

$${}_n\mathrm{a}_x = \sum_{k=1}^{n} v^k\,{}_kp_x \quad . \tag{102}$$

[5] Le *rendite vitalize frazionate*, nelle quali la rata viene pagata con periodicità subannuale, sono in realtà più frequenti nella pratica assicurativa italiana, ma possono essere trattate in modo simile a quanto verrà fatto per il caso annuale; le rendite con rata variabile determinsiticamente sono invece poco frequenti, mentre il caso di rata rivalutabile verrà trattato in seguito.

Nel caso anticipato sia ha invece

$$Y_k = \begin{cases} R\,\mathbf{1}_{\{T_x>k\}} & \text{se } 0 \le k < n, \\ 0 & \text{altrimenti}, \end{cases} \tag{103}$$

$$V(0,\boldsymbol{Y}) = R\,{}_n\ddot{\mathrm{a}}_x \ , \tag{104}$$

$${}_n\ddot{\mathrm{a}}_x = \sum_{k=0}^{n-1} v^k\,{}_kp_x = 1 + {}_n\mathrm{a}_x - v^n\,{}_np_x \ . \tag{105}$$

Rendite vitalizie differite. Se il contratto prevede che la rendita vitalizia sia erogata dopo un certo differimento m, si ha la prestazione di *rendita vitalizia differita*, che può essere temporanea o meno, anticipata o posticipata. Sono quindi previste due fasi contrattuali: il *periodo di differimento*, durante il quale non vengono erogate prestazioni, e il *periodo di pagamento della rendita*, detto anche, dal punto di vista dell'assicurato, *periodo di godimento della rendita*.

Se si pone

$${}_{m|}\mathrm{a}_x = \sum_{k=m+1}^{\omega_x} v^k\,{}_kp_x \ , \tag{106}$$

$${}_{m|n}\mathrm{a}_x = \sum_{k=m+1}^{m+n} v^k\,{}_kp_x \ , \tag{107}$$

$${}_{m|}\ddot{\mathrm{a}}_x = \sum_{k=m}^{\omega_x} v^k\,{}_kp_x = v^m\,{}_mp_x + {}_{m|}\mathrm{a}_x \ , \tag{108}$$

$${}_{m|n}\ddot{\mathrm{a}}_x = \sum_{k=m}^{m+n-1} v^k\,{}_kp_x = v^m\,{}_mp_x + {}_{m|n}\mathrm{a}_x - v^{m+n}\,{}_{m+n}p_x \ , \tag{109}$$

il valore alla stipula delle varie tipologie di rendita vitalizia differita risulta

$$V(0,\boldsymbol{Y}) = \begin{cases} R\,{}_{m|}\mathrm{a}_x & \text{nel caso posticipato}, \\ R\,{}_{m|n}\mathrm{a}_x & \text{nel caso posticipato temporaneo di durata } n, \\ R\,{}_{m|}\ddot{\mathrm{a}}_x & \text{nel caso anticipato}, \\ R\,{}_{m|n}\ddot{\mathrm{a}}_x & \text{nel caso anticipato temporaneo di durata } n. \end{cases} \tag{110}$$

È utile segnalare un'importante relazione che vale nel modello tradizionale e collega i valori delle rendite differite con quelli delle corrispondenti rendite immediate. Per la legge esponenziale vale infatti la proprietà di scindibilità, che comporta che se per ogni $k \ge m$ allora $v^k = v^m v^{m-k}$; una proprietà simile vale per le probabilità di vita (cfr. (42) a pagina 8): ${}_xp_k = {}_xp_m\,{}_{k-m}p_{x+m}$.. Se si considera quindi la rendita vitalizia posticipata unitaria e differita di m anni e si applicano queste proprietà si ha che

$${}_{m|}\mathrm{a}_x = \sum_{k=m+1}^{\omega_x} v^k\,{}_kp_x = v^m\,{}_xp_m \sum_{k=m+1}^{\omega_x} v^{k-m}\,{}_{k-m}p_{x+m} \ .$$

Ricordando che $v^m\,{}_mp_x = {}_m\mathrm{E}_x$ e operando nella somma il cambiamento di indice $h = k - m$, si ha

$${}_{m|}\mathrm{a}_x = {}_m\mathrm{E}_x \sum_{h=1}^{\omega_x} v^h\,{}_hp_{x+m} = {}_m\mathrm{E}_x\ \mathrm{a}_{x+m} \ , \tag{111}$$

che mostra come il valore alla stipula della rendita differita su una testa di età x sia uguale al valore in zero del valore al termine del differimento della corrispondente rendita immediata su una testa di età $x+m$. Proprietà analoghe valgono per le altre forme:

$$ {}_{m|n}\mathrm{a}_x = {}_m\mathrm{E}_x \, {}_n\mathrm{a}_{x+m} \quad , \tag{112} $$

$$ {}_{m|}\ddot{\mathrm{a}}_x = {}_m\mathrm{E}_x \, \ddot{\mathrm{a}}_{x+m} \quad , \tag{113} $$

$$ {}_{m|n}\ddot{\mathrm{a}}_x = {}_m\mathrm{E}_x \, {}_n\ddot{\mathrm{a}}_{x+m} \quad . \tag{114} $$

3.2.3 Altre prestazioni

Oltre alle tipologie di prestazioni già discusse, le polizze vite presenti nella pratica commericale italiana possono avere altre prestazioni, delle quali daremo solo alcuni cenni.

- Spesso i prodotti assicurativi comprendono delle *prestazioni complementari* che coprono rischi non propriamente vita. Tra queste ci sono:
  - prestazioni complementari in caso di eventi legati alla *salute dell'assicurato* quali, ad esempio, la sopraggiunta invalidità permanente o la perdita dell'autosufficienza;
  - assicurazioni complementari per *morte accidentale* (ACMA) e da *incidente stradale* (ACMAIS); un esempio diffuso è la polizza mista con ACMAIS, dove la prestazione caso morte viene raddoppiata in caso di morte accidentale e triplicata nel caso la morte accidentale sia dovuta a cause legate alla circolazione di autoveicoli;
  - prestazioni legate al rendimento scolastico dell'assicurato, come nel caso della mista con *bonus scolastico*, dove la prestazione caso vita è indicizzata al voto di maturità dell'assicurato (naturalmente la polizza viene venduta a studenti non ancora diplomati).
- Normalmente all'assicurato viene data la facoltà di *riscattare* il contratto, risolvendolo e incassando anticipatamente la prestazione, che viene però abbattuta di una *penale di riscatto*. Da un punto di vista teorico si tratta di un'*opzione americana* con sottostante la prestazione stessa, anche se nella pratica non viene valutata come tale: l'esperienza mostra che non è possibile fare l'ipotesi che l'assicurato la eserciterà *razionalmente*, ma sarà piutttosto condizionato da esigenze collegate alle sue scelte di consumo.[6]
- Nelle polizze che prevedono una prestazione in caso di vita a scadenza è spesso incorporata l'opzione di convertire l'importo della prestazione a scadenza in una rendita vitalizia, a condizioni contrattualmente stabilite (*opzione di conversione in rendita*). Simmetricamente, nelle polizze di rendita differita, è normalmente concessa all'assicurato l'opzione, da esercitarsi al termine del differimento, di convertire la rendita in un capitale immediatamente esigibile (*opzione di conversione in capitale*). Come nel caso dell'opzione di riscatto, la valutazione di queste opzioni non può essere condotta in ipotesi di esercizio razionale.
- Un'altra opzione spesso inserita nei contratti che prevedono una prestazione in caso di vita a scadenza è il *differimento automatico di scadenza* (DAS). Anche questa è

[6] Nella valutazione delle opzioni americane, oltre all'ipotesi di mercati perfetti e privi di opportunità di arbitraggi non rischiosi, si fa l'ipotesi aggiuntiva di *esercizio razionale*, cioè che il detentore dell'opzione eserciti l'opzione al meglio e indipendentemente da situazioni personali. Si può dimostrare che l'ipotesi di esercizio razionale comporta che l'opzione verrà esercitata immediamente non appena il *valore intrinseco* della stessa (pagamento contrattualmente previsto in caso di esercizio) risulti maggiore o uguale al *valore di prosecuzione* (valore di mercato dell'opzione residua in caso di non esercizio). Questo risultato fornisce la chiave per la valutazione delle opzioni americane.

un'opzione che l'assicurato può esercitare in caso di vita alla scadenza contrattuale e prevede che la prosecuzione del contratto alle stesse condizioni, tacitamente rinnovabile di anno in anno finché l'assicurato non decida di incassare la prestazione.[7]

- Hanno una certa diffusione le polizze di *rendita vitalizia reversibile*. Sono polizze in cui vi sono più assicurati (solitamente due) e la rendita vitalizia che viene pagata al primo assicurato è reversibile (in tutto o in parte) al secondo, se sarà in vita al decesso del primo. Si tratta pertanto di una polizza che è legata alle durate della vita di più teste.

3.3 Classificazione in base alla tipologia di premio

3.3.1 Polizze a premio unico

In una polizza a *premio unico* l'assicurato corrisponde all'assicuratore all'atto della stipula un premio in cambio delle prestazioni che percepirà nei tempi e nei modi previsti dalla tipologia contrattuale. In base alle considerazioni svolte nel paragrafo 1.2, il premio unico praticato dall'assicuratore, detto *premio di tariffa*, non può essere inferiore al premio unico puro, che già comprende il caricamento di sicurezza (*caricamento implicito*). Normalmente è strettamente maggiore e la maggiorazione rispetto al premio puro è il *caricamento esplicito*.

Se si fissa, al tempo zero di stipula una base tecnica del primo ordine (i, S), un flusso di prestazioni $\boldsymbol{Y}$ e l'età dell'assicurato x e si indica con con U il premio unico puro e con T il premio unico di tariffa, dovrà risultare

$$T \geq U = V(0, \boldsymbol{Y}) \tag{115}$$

e il caricamento esplicito (o *caricamento totale*) è

$$H = T - U \geq 0 \ , \tag{116}$$

Spesso si percentualizza il caricamento H rispetto al premio di tariffa T, ottenendo il *tasso di caricamento*

$$h = \frac{H}{T} \tag{117}$$

che risulta ovviamente non negativo e minore di 1. Il premio unico di tariffa è allora dato da

$$T = U + hT \ , \tag{118}$$

cioè da

$$T = \frac{U}{1-h} \ . \tag{119}$$

Nella pratica assicurativa il caricamento esplicito H è chiamato *caricamento per spese* e l'idea è che l'assicuratore deve caricare i premi puri per recuperare le spese che subisce durante la vita del contratto con il caricamento H. La terminologia incorpora però spesso una certa dose di "ipocrisia", in quanto il caricamento H viene spesso calibrato in modo sovrabbondante, almeno nelle intenzioni dell'assicuratore, rispetto alle spese previste e incorpora quindi una parte di utile.

Tradizionalmente il caricamento totale viene scomposto in tre componenti non negative

$$H = G + A + I \ , \tag{120}$$

[7] Questa opzione ha senso in pratica solo nelle *polizza rivalutabili*, che discuteremo in seguito, dove le prestazioni vengono rivalutate annualmente e quindi, esercitando l'opzione, l'assicurato decide di differire la prestazione ad una data futura, dove verrà corrisposta maggiorata della rivalutazione.

dove G è la componente che compensa le *spese di gestione* della polizza, A le *spese di acquisizione* del contratto e I le *spese di incasso* del premio. Le prime sono le spese che l'assicuratore subisce negli anni di durata del contratto per la gestione amministrativa della polizza. Le spese di acquisizione sono la provvigione che l'assicuratore versa all'agente che ha procurato il contratto. Le spese di incasso del premio coprono le spese sostenute dalla rete di vendita per l'incasso del premio.[8]

Esempio 3.3.1. In un contratto di capitalizzazione con capitale a scadenza C e durata n il premio unico puro è $U = Cv^n$. Equivalentemente il capitale a scadenza è $C = U(1+i)^n$ e da quest'ultima relazione deriva il nome della forma contrattuale: la prestazione a scadenza è il premio unico puro capitalizzato. □

Esempio 3.3.2. In una polizza di capitale differito con capitale assicurato C, durata n ed età dell'assicurato x il premio unico puro è $U = C\,{}_n\mathrm{E}_x$. Equivalentemente $C = U/{}_n\mathrm{E}_x = U(1+i)^n/{}_np_x \geq U(i+1)^n$ e la disuguaglianza è stretta se ${}_xp_n < 1$, come accade di solito. □

3.3.2 Polizze a premio annuo

Il contratto può prevedere che il premio, anziché essere versato in unica soluzione alla stipula del contratto, possa essere rateizzato in rate annuali[9] anticipate, il cui pagamento è subordinato all'essere in vita dell'assicurato. In una *polizza a premio annuo* quindi, l'assicurato scambia una rendita vitalizia anticipata con le prestazioni previste dalla forma contrattuale e che sono a carico dell'assicuratore; normalmente il premio annuo è costante[10] e nel seguito faremo riferimento solo a questo caso. La rendita vitalizia dei premi è inoltre normalmente temporanea, con durata coincidente con la durata del contratto; possono aversi tuttavia casi di *durata pagamento premi* minore della durata contruattuale e questo capita tipicamente nelle vita intera.

Si assuma fissata la base tecnica del I ordine (i, S), il flusso $\boldsymbol{Y}$ delle prestazioni e l'età x dell'assicurato al tempo zero di stipula. In riferimento al caso di premio annuo costante e durata pagamento premi n, l'importo X_k che l'assicurato deve corrispondere all'assicuratore al tempo $k \geq 0$ è

$$X_k = \begin{cases} P\,\mathbf{1}_{\{T_x > k\}} & \text{se } k < n, \\ 0 & \text{se } k \geq n, \end{cases} \tag{121}$$

dove P è livello costante del premio annuo. Lo scambio del flusso $\boldsymbol{X} = \{X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}\}$ dei premi con il flusso $\boldsymbol{Y}$ delle prestazioni è in equilibrio attuariale se e solo se

$$V(0, \boldsymbol{X}) = V(0, \boldsymbol{Y}) \ .$$

Poiché $V(0, \boldsymbol{Y}) = U$ e $V(0, \boldsymbol{X}) = P\,{}_n\ddot{\mathrm{a}}_x$, la condizione di equilibrio diventa

$$P = \frac{U}{{}_n\ddot{\mathrm{a}}_x} \ , \tag{122}$$

che è la formula di rateizzazione del premio unico U in n annualità vitalizie anticipate di importo P.

[8]Per le polizze a premio unico solitamente $I = 0$ perché il premio è versato all'atto dell'acquisizione del contratto; per le polizze a premio annuo si hanno invece caricamenti per spese di incasso positivi.

[9]Il caso di rata annuale è quello di riferimento, ma la rateizzazione può essere operata anche con rate di periodicità inferiore all'anno.

[10]Nella pratica assicurativa italiana vi sono esempi poco frequenti di *polizze a premio annuo crescente* in progressione geomterica, mentre il caso delle polizze a *premio annuo rivalutabile* può aversi nelle polizze rivalutabili che saranno discusse in seguito.

Il premio annuo calcolato in base alla (122) è naturalmente il *premio annuo puro*. Come nelle polizze a premio unico, il premio annuo effettivamente corrisposto dall'assicurato è il *premio annuo di tariffa* Π, ottenuto aggiungendo al premio annuo puro il caricamento per spese. Indicando nuovamente il tasso di caricamento totale con h, il premio annuo di tariffa risulta

$$\Pi = \frac{P}{1-h} \quad . \tag{123}$$

Confrontando la (123) con la (119) e tenendo presente la (122) si ottiene che il premio annuo di tariffa Π è la rateizzazione del premio unico di tariffa T:

$$\Pi = \frac{T}{{}_n\ddot{a}_x} \quad . \tag{124}$$

Nelle polizze a premio annuo l'assicurato ha tipicamente la facoltà di *riduzione della polizza*, che è un'opzione di trasformazione del contratto da premio annuo a premio unico: l'assicurato che si avvale questa facoltà interrompe il versamento dei premi, l'assicuratore riduce conseguentemente le prestazioni (secondo le modalità previste dal contratto e tipicamente applicando una *penale di riduzione*) e la polizza prosegue come se fosse stata orginariamente stipulata a premio unico e con le prestazioni ridotte.

Anche nelle polizze a premio annuo il caricamento totale $H = \Pi - P$ che grava sul premio annuo è la somma delle tre componenti imputabili alle spese di gestione, di acquisizione e di incasso.[11]

In particolare, il caricamento per spese di acquisizione serve per recuperare la provvigione di acquisizione, che tipicamente l'assicuratore versa all'agente alla data di stipula (provvigione precontata) e poi recupera durante la vita della polizza. Se infatti S è la provvigione di acquisizizione, il caricamento per corrispondente A che grava su ciasuno degli n premi annui è calibrato in maniera tale che $S = A\,{}_n\ddot{a}_x$.

Il caricamento per spese di incasso è invece la parte del premio che viene trattenuta dalla rete di vendita e che può essere interpretata come una commissione che incentiva la rete a "seguire" negli anni la polizza e "vigilare" sull'effettivo versamento dei premi.

Tutte le forme contrattuali presenti nella pratica possono essere a premio unico o a premio annuo, con l'eccezione delle capitalizzazioni, per le quali il caso a premio annuo non è previsto.

3.3.3 Polizze a premio unico ricorrente

In una polizza a premio annuo l'assicuratore costituisce l'intero capitale assicurato alla stipula del contratto, nonostante l'assicurato versi a quella data solo la prima annualità di premio. In una polizza a *premio unico ricorrente*, invece, il capitale assicurato si costituisce progressivamente con il versamento dei premi. Lo schema contrattuale prevede il versamento di una successione di un certo numero di premi anticipati, ciascuno dei quali attiva una linea di assicurazione con un suo capitale assicurato. Il modo più semplice di considerare una polizza a premio unico ricorrente è pertanto quello di vederla come un *portafoglio di polizze a premio unico* della stessa tipologia, con la prima a pronti e le altre a termine. Siano Π_0, Π_1, ..., Π_{n-1} gli n premi unici ricorrenti di tariffa previsti dal contratto, pagabili rispettivamente ai tempi $0, 1, \ldots, n-1$. Sia h_ℓ il tasso di caricamento totale del premio Π_ℓ. Se $\boldsymbol{Y}_\ell$ è il vettore di prestazioni della ℓ-esima linea, attivato con il versamento del premio ℓ-esimo, allora per ogni ℓ il premio unico ricorrente puro è

$$\frac{\Pi_\ell}{1-h_\ell} = P_\ell = V(\ell, \boldsymbol{Y}_\ell) \quad . \tag{125}$$

[11] Nel caso di frazionamento del premio annuo in rate subannuali, nella pratica assicurativa italiana vengono ulteriormente caricati gli *interessi di frazionamento*.

Nella pratica assicurativa, per semplicità contrattuale, il premio unico ricorrente di tariffa è normalmente costante.

Esempio 3.3.3. Un contratto di capitalizzazione a premio unico ricorrente Π (costante), tasso di caricamento h (costante) e durata di n anni, prevede il versamento di n premi ai tempi $0, 1, \ldots, n-1$. Alla stipula si ha il versamento del primo premio, cui corrisponde il premio puro

$$P = \Pi(1-h)$$

e il capitale a scadenza

$$C_{0,n} = P(1+i)^n = \Pi(1-h)(1+i)^n \ .$$

Con il versamento del secondo premio al tempo 1 si attiva la seconda linea, che ha lo stesso premio puro e capitale a scadenza

$$C_{1,n} = P(1+i)^{n-1} = \Pi(1-h)(1+i)^{n-1} \ .$$

Così continuando, per ogni $\ell < n$ si attiva una linea con capitale a scadenza

$$C_{\ell,n} = P(1+i)^{n-\ell} = \Pi(1-h)(1+i)^{n-\ell} \ .$$

Alla scadenza contrattuale la prestazione complessiva è la somma delle prestazioni attivate con ciascuna linea:

$$\sum_{\ell=0}^{n-1} C_{\ell,n} = \Pi(1-h)\sum_{\ell=0}^{n-1}(1+i)^{n-\ell} = \Pi(1-h)(1+i)^n \sum_{\ell=0}^{n-1}(1+i)^{-\ell} = \Pi(1-h)\frac{(1+i)^n-1}{1-v} \ .$$

Si osservi che il premio puro è costante ma, se $i > 0$, il capitale a scadenza attivato è decrescente con ℓ. $\square$

Esempio 3.3.4. In una polizza di capitale differito a premio unico ricorrente Π (costante), tasso di caricamento h (costante) e durata n anni, il premio puro di ciascuna linea è sempre lo stesso e vale

$$P = \Pi(1-h) \ .$$

Il capitale assicurato della linea ℓ è

$$C_{\ell,n} = \frac{P}{{}_{n-\ell}\mathrm{E}_{x+\ell}} = \frac{\Pi(1-h)}{{}_{n-\ell}\mathrm{E}_{x+\ell}}$$

ed è quindi funzione di ℓ. $\square$

Esempio 3.3.5. Anche in una polizza mista a premio unico ricorrente Π (costante), tasso di caricamento h (costante) e durata n anni il premio puro è costante: $P = \Pi(1-h)$. Il capitale assicurato attivato con la linea ℓ è

$$C_{\ell,n} = \frac{P}{{}_{n-\ell}\mathrm{E}_{x+\ell} + {}_{n-\ell}\mathrm{A}_{x+\ell}} = \frac{\Pi(1-h)}{{}_{n-\ell}\mathrm{E}_{x+\ell} + {}_{n-\ell}\mathrm{A}_{x+\ell}} \ .$$

In caso di morte alla data k (prima del versamento del premio previsto in k), la prestazione caso morte Y_k che viene pagata è quella costituita con le k linee attivate fino a quella data:

$$Y_k = \sum_{\ell=0}^{k-1} C_{\ell,n} \ .$$

Il capitale assicurato caso vita a scadenza è la somma dei capitali assicurati costituiti con il versamento di tutti i premi

$$C_n = \sum_{\ell=0}^{n-1} C_{\ell,n}$$

e, rispetto alla polizza mista a premio annuo con lo stesso capitale assicurato caso vita, la prestazione caso morte in $k < n$ è minore. $\square$

Nella pratica bancassicurativa le polizze a premio unico ricorrente sono più diffuse di quelle a premio annuo, perché sono più semplici da spiegare e da promuovere ai clienti degli sportelli bancari. Spesso vengono commercializzate senza penali di interruzione pagamento premi né di riscatto e vengono presentate al cliente come un'alternativa all'investimento in un fondo comune.

3.3.4 La controassicurazione.

La *controassicurazione* è una tipologia di prestazione caso morte che è collegata ai premi che l'assicurato versa. È abbinata tipicamente a polizze di capitale differito o di rendita differita e prevede che, in caso di decesso dell'assicurato durante il periodo di differimento, l'assicuratore restituisca i premi (compreso il caricamento) versatigli fino a quella data.

Polizze a premio unico con controassicurazione. In una polizza a premio unico la controassicurazione coincide con la prestazione temporanea caso morte, con capitale assicurato il premio unico di tariffa T. Se $\boldsymbol{Y}^{\mathrm{v}}$ è il flusso delle prestazioni previste per il caso vita, n è la durata della copertura caso morte e h il tasso di caricamento totale, il premio unico puro U e il premio unico di tariffa T soddisfano il sistema

$$\begin{cases} U = V(0, \boldsymbol{Y}^{\mathrm{v}}) + T\,{}_n\mathrm{A}_x \\ T = \dfrac{U}{1-h} \end{cases} \tag{126}$$

che ha per soluzione

$$U = \frac{V(0, \boldsymbol{Y}^{\mathrm{v}})(1-h)}{1-h-{}_n\mathrm{A}_x}\ , \tag{127}$$

$$T = \frac{V(0, \boldsymbol{Y}^{\mathrm{v}})}{1-h-{}_n\mathrm{A}_x}\ . \tag{128}$$

Esempio 3.3.6. Una polizza di capitale differito con controassicurazione a premio unico, con capitale assicurato C e differimento n coincide con una polizza mista di durata n anni, con capitale assicurato caso vita $C^{\mathrm{v}} = C$ e caso morte $C^{\mathrm{m}} = T$. Si ha quindi

$$U = \frac{C\,{}_n\mathrm{E}_x(1-h)}{1-h-{}_n\mathrm{A}_x}\ , \tag{129}$$

$$T = \frac{C\,{}_n\mathrm{E}_x}{1-h-{}_n\mathrm{A}_x}\ . \quad \square \tag{130}$$

Esempio 3.3.7. Una polizza di rendita differita posticipata con controassicurazione a premio unico, rata della rendita R e differimento n è un portafoglio composto da una rendita differita e da una temporanea caso morte con capitale assicurato $C^{\mathrm{m}} = T$. Il premio unico puro e il premio unico di tariffa sono quindi

$$U = \frac{R\,{}_{n|}\mathrm{a}_x(1-h)}{1-h-{}_n\mathrm{A}_x}\ , \tag{131}$$

$$T = \frac{R\,{}_{n|}\mathrm{a}_x}{1-h-{}_n\mathrm{A}_x}\ . \quad \square \tag{132}$$

Polizze a premio annuo con controassicurazione. In una polizza premio annuo la controassicurazione è una prestazione temporanea caso morte con capitale assicurato crescente in progressione artimetica. Se infatti Π è il premio annuo di tariffa, la prestazione per il caso morte nel primo anno è $C_1^{\mathrm{m}} = \Pi$, nel secondo è $C_2^{\mathrm{m}} = 2\Pi$ e così via. Consideriamo per semplicità il caso di una polizza con durata pagamento premi coincidente con la durata n della polizza (del differimento nel caso di polizze di rendita differita). Il pagamento in caso morte al tempo $k \leq n$ è quindi $C_k^{\mathrm{m}} = k\Pi$; sia $\boldsymbol{Y}^{\mathrm{v}}$ il flusso delle prestazioni previste per il caso vita e h il tasso di caricamento totale. Il premio unico puro U e il premio unico di tariffa T soddisfano il sistema

$$\begin{cases} U = V(0, \boldsymbol{Y}^{\mathrm{v}}) + \Pi \sum_{k=1}^{n} k v^k {}_{k-1|1}q_x \\ T = \dfrac{U}{1-h} \end{cases} \tag{133}$$

Usando il simbolo

$${}_n\mathrm{IA}_x = \sum_{k=1}^{n} k v^k {}_{k-1|1}q_x \tag{134}$$

e ricordando la (124), la soluzione del sistema (133) è

$$U = \frac{V(0, \boldsymbol{Y}^{\mathrm{v}})\,{}_n\ddot{\mathrm{a}}_x(1-h)}{(1-h)\,{}_n\ddot{\mathrm{a}}_x - {}_n\mathrm{IA}_x} \ , \tag{135}$$

$$T = \frac{V(0, \boldsymbol{Y}^{\mathrm{v}})\,{}_n\ddot{\mathrm{a}}_x}{(1-h)\,{}_n\ddot{\mathrm{a}}_x - {}_n\mathrm{IA}_x} \ . \tag{136}$$

Il premio annuo puro e il premio annuo di tariffa sono quindi

$$P = \frac{U}{{}_n\ddot{\mathrm{a}}_x} = \frac{V(0, \boldsymbol{Y}^{\mathrm{v}})}{(1-h)\,{}_n\ddot{\mathrm{a}}_x - {}_n\mathrm{IA}_x} \ , \tag{137}$$

$$\Pi = \frac{T}{{}_n\ddot{\mathrm{a}}_x} = \frac{V(0, \boldsymbol{Y}^{\mathrm{v}})}{(1-h)\,{}_n\ddot{\mathrm{a}}_x - {}_n\mathrm{IA}_x} \ . \tag{138}$$

Esempio 3.3.8. In riferimento alle notazioni dell'esempio 3.3.6, se la polizza di capitale differito è a premio annuo, risulta

$$P = \frac{C\,{}_n\mathrm{E}_x(1-h)}{(1-h)\,{}_n\ddot{\mathrm{a}}_x - {}_n\mathrm{IA}_x} \ , \tag{139}$$

$$\Pi = \frac{C\,{}_n\mathrm{E}_x}{(1-h)\,{}_n\ddot{\mathrm{a}}_x - {}_n\mathrm{IA}_x} \ . \quad \Box \tag{140}$$

Esempio 3.3.9. In riferimento alle notazioni dell'esempio 3.3.7, se la rendita differita è a premio annuo, i premi sono

$$P = \frac{R\,{}_{n|}\mathrm{a}_x(1-h)}{(1-h)\,{}_n\ddot{\mathrm{a}}_x - {}_n\mathrm{IA}_x} \ , \tag{141}$$

$$\Pi = \frac{R\,{}_{n|}\mathrm{a}_x}{(1-h)\,{}_n\ddot{\mathrm{a}}_x - {}_n\mathrm{IA}_x} \ . \quad \Box \tag{142}$$

Polizze a premio unico ricorrente con controassicurazione. Nelle polizze a premio unico ricorrente la controassicurazione agisce su ogni linea del contratto e le logiche sono quindi le stesse delle polizze a premio unico.

Esempio 3.3.10. Una polizza di capitale differito con controassicurazione a premio unico ricorrente coincide con una polizza mista a premio unico ricorrente, con capitale assicurato caso morte (di ogni linea) il premio unico ricorrente di tariffa. $\Box$

4 La riserva matematica

4.1 Introduzione

La polizza, come si è visto, viene costruita in modo da essere in equilibrio attuariale alla data di stipula $t = 0$ e rispetto alla base tecnica del I ordine: se $\boldsymbol{X}$ è il flusso dei premi puri e $\boldsymbol{Y}$ il flusso delle prestazioni, risulta

$$V(0, \boldsymbol{X}) = V(0, \boldsymbol{Y}) \ .$$

L'equilibrio non permane però nel corso della durata del contratto.

Per le polizze a premio unico questo fatto è chiaro: ad un istante $t > 0$ che precede la scadenza della polizza l'unico premio previsto è già stato pagato, mentre, se il contratto non si è già concluso (ad esempio per la morte dell'assicurato), sono ancora previste prestazioni.

Il disequilibrio ad istanti successivi alla stipula sussiste anche nel caso di polizze a premio annuo.

Esempio 4.1.1. Si consideri una polizza mista a premio annuo, per una durata di n anni, tasso tecnico i, capitale assicurato C, stipulata da un assicurato di età x. Il flusso dei premi contrattualmente previsti è

$$X_k = \begin{cases} P\,\mathbf{1}_{\{T_x > k\}} & \text{se } k = 0,\, 1,\, \ldots,\, n-1, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

dove $P = C({}_n\mathrm{E}_x + {}_n\mathrm{A}_x)/{}_n\ddot{\mathrm{a}}_x$ è il premio annuo puro.

Il flusso delle prestazioni $\boldsymbol{Y}$ è

$$Y_k = \begin{cases} C\,\mathbf{1}_{\{T_x = k\}} & \text{se } k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n-1, \\ C\,\mathbf{1}_{\{T_x = k\}} + C\,\mathbf{1}_{\{T_x > k\}} & \text{se } k = n, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Sia $t \leq n$ è un istante generico, che per semplicità assumeremo intero. Si assuma inoltre che all'istante t il contratto sia ancora in essere, cioè che l'assicurato sia ancora in vita. Se $0 \leq t \leq n-1$, all'istante t sono stati pagati t premi degli n previsti dal contratto.[12] Il flusso di premi residui è quindi una rendita vitalizia anticipata con rata P, durata $n - t$ e testa assicurata di età $x + t$. Se invece $t > n - 1$, non ci sono più premi residui. Se si indica con $V(t, \boldsymbol{X})$ il valore dei premi residui in t, si ha quindi che

$$V(t, \boldsymbol{X}) = \begin{cases} P\ {}_{n-t}\ddot{\mathrm{a}}_{x+1} & \text{se } t \leq n-1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Alla stessa data t le prestazioni residue della polizza sono $Y_{t+1}, Y_{t+2}, \ldots, Y_n$ e il flusso delle prestazioni residue coincide con il flusso di prestazioni di una polizza mista di durata con durata $n - t$, capitale assicurato C e testa assicurata di età $x + t$. Indicando con $V(t, \boldsymbol{Y})$ il valore delle prestazioni residue in t, si ha che

$$V(t, \boldsymbol{Y}) = C({}_{n-t}\mathrm{E}_{x+t} + {}_{n-t}\mathrm{A}_{x+t}) \ .$$

Se $n > 1$ (per $n = 1$ la polizza è in realtà a premio unico) e $t > 0$ si può verificare che risulta sistematicamente $V(t, \boldsymbol{X}) < V(t, \boldsymbol{Y})$. □

[12] Poiché i premi annui sono anticipati, si immagina che il premio sia dovuto in t^+, cioè "un istante dopo t".

4.2 La riserva matematica

Si consideri al tempo $t > 0$, che per semplicità assumeremo intero, una polizza ancora in essere, stipulata al tempo zero da una testa di età x anni. Sia $\boldsymbol{X}$ il vettore dei premi previsti e $\boldsymbol{Y}$ il vettore delle prestazioni previste. La *riserva matematica (ai premi puri)* della polizza al tempo t è

$$ {}_tV_x = V(t, \boldsymbol{Y}) - V(t, \boldsymbol{X}) \ , \tag{143} $$

cioè il valore delle prestazioni residue in t meno il valore dei premi puri residui in t, calcolati entrambi secondo la base tecnica del I ordine.

La riserva matematica definita secondo la (143) è spesso chiamata *riserva matematica prospettiva*, in quanto è calcolata sulla base dei premi e delle prestazioni future rispetto alla data di valutazione. Per convenzione, nel calcolo delle riserva matematica, si considerano già liquidate in t le eventuali prestazioni posticipate e non ancora liquidati l'eventuale premio in scadenza (che è anticipato) e le eventuali prestazione anticipate. La *riserva matematica completa* (detta anche *riserva di bilancio*), è invece calcolato "dopo tutto", considerando cioè liquidiati tutti i premi e le prestazioni dovute in t.

La (143) definisce la riserva matematica come differenza fra la *riserva prestazioni* $V(t, \boldsymbol{Y})$ e la *riserva premi (puri)* $V(t, \boldsymbol{X})$. La riserva prestazioni può essere ulteriormente scomposta nella somma della *riserva prestazioni caso vita* $V(t, \boldsymbol{Y}^{\mathrm{v}})$ con la *riserva prestazioni caso morte* $V(t, \boldsymbol{Y}^{\mathrm{m}})$.

Si osservi che, per costruzione, alla data di stipula la riserva matematica risulta nulla, mentre la riserva di bilancio coincide con il premio puro (il premio unico o il primo premio annuo) versato dall'assicurato.

Esempio 4.2.1. In un contratto di capitalizzazione a premio unico U, con durata n anni, tasso tecnico i e capitale $C = U(1+i)^n$, , si ha

$$ {}_0V_x = 0 \qquad\qquad {}_0V_x^+ = U = C\,(1+i)^{-n} \ , $$

mentre per $0 < t \leq n$ risulta

$$ {}_tV_x = C\,(1+i)^{-(n-t)} = {}_tV_x^+ \ . \quad \square $$

Esempio 4.2.2. In una polizza mista a premio unico, con durata n anni, tasso tecnico i, capitale assicurato C ed età dell'assicurato alla stipula x, si ha

$$ {}_0V_x = 0 \qquad\qquad {}_0V_x^+ = U = C\,({}_n\mathrm{E}_x + {}_n\mathrm{A}_x) \ , $$

mentre per $0 < t \leq n$ risulta

$$ {}_tV_x = C\,({}_{n-t}\mathrm{E}_{x+t} + {}_{n-t}\mathrm{A}_{x+t}) = {}_tV_x^+ \ . $$

Naturalmente, la riserva prestazioni caso vita in t è $C\,{}_{n-t}\mathrm{E}_{x+t}$, mentre la riserva prestazioni caso morte alla stessa data è $C\,{}_{n-t}\mathrm{A}_{x+t}$. $\square$

Esempio 4.2.3. In una polizza di rendita vitalizia differita posticipata a premio annuo, con differimento n anni, tasso tecnico i, rata della rendita assicurata R ed età dell'assicurato alla stipula x, si ha

$$ {}_0V_x = 0 \qquad\qquad {}_0V_x^+ = P = \frac{R\,{}_{n|}\mathrm{a}_x}{{}_n\ddot{\mathrm{a}}_x} \ ; $$

per $0 < t < n$, durante il differimento, risulta

$$ {}_tV_x = R\,{}_{n-t|}\mathrm{a}_{x+t} - P\,{}_{n-t}\ddot{\mathrm{a}}_{x+t} \qquad\qquad {}_tV_x^+ = {}_tV_x + P \ ; $$

per $t \geq n$, durante il perido di godimento della rendita, si ha infine

$$ {}_tV_x = R\,\mathrm{a}_{x+t} = {}_tV_x^+ \quad . $$

Durante il periodo di differimento la riserva prestazioni è $R\,{}_{n-t|}\mathrm{a}_{x+t}$ e la riserva premi è $P\,{}_{n-t}\ddot{\mathrm{a}}_{x+t}$. Nel periodo di godimento della rendita la riserva premi è nulla e la riserva prestazioni coincide con la riserva matematica. Poiché non sono previste prestazioni caso morte, la relativa riserva è nulla e la riserva prestazioni caso vita coincide con la riserva prestazioni. □

Esempio 4.2.4. Si consideri una polizza a premio di capitale differito C per n anni con controassicurazione, tasso tecnico i ed età alla stipula x, con premio annuo puro P e premio annuo di tariffa Π.

Al tempo $0 < t < n$ la riserva premi (puri) è

$$ P\,{}_{n-t}\ddot{\mathrm{a}}_{x+t} \quad , $$

la riserva prestazioni caso vita è

$$ C\,{}_{n-t}\mathrm{E}_{x+t} \quad , $$

la riserva prestazioni caso morte è

$$ \sum_{k=t+1}^{n} k\Pi\,{}_{k-t-1|1}q_{x+t}\,(1+i)^{-(k-t)} \quad , $$

che, con il cambiamento di variabile $j = k - t$, può essere scritta nella forma

$$ \begin{aligned} \sum_{j=1}^{n-t} (t+j)\Pi\,{}_{j-1|1}q_{x+t}\,(1+i)^{-j} &= t\Pi \sum_{j=1}^{n-t} {}_{j-1|1}q_{x+t}\,(1+i)^{-j} + \Pi \sum_{j=1}^{n-t} j\,{}_{j-1|1}q_{x+t}\,(1+i)^{-j} \\ &= \Pi\left(t\,{}_{n-t}\mathrm{A}_{x+t} + {}_{n-t}\mathrm{IA}_{x+t}\right) \quad . \end{aligned} $$

La riserva matematica è quindi

$$ {}_tV_x = C\,{}_{n-t}\mathrm{E}_{x+t} + \Pi\left(t\,{}_{n-t}\mathrm{A}_{x+t} + {}_{n-t}\mathrm{IA}_{x+t}\right) - P\,{}_{n-t}\ddot{\mathrm{a}}_{x+t} \quad . \quad \square $$

Osservazione 4.2.1. Si noti l'analogia concettuale fra la riserva matematica di una polizza e il debito residuo di un mutuo: è in entrambi i casi il valore (netto) del contratto residuo. □

Osservazione 4.2.2. Tutte le polizze vita sono costruite in modo tale che, durante la loro vita contrattuale, la riserva matematica non diventi negativa. Ciò significa che l'assicuratore congegna il contratto in modo tale da essere sempre debitore e mai creditore nei confronti dell'assicurato. □

Osservazione 4.2.3. La riserva matematica o, meglio, la riserva matematica completa, è una grandezza bilancistica: essendo il valore netto degli impegni residui dell'assicuratore, questi deve metterla a bilancio, investendola in attivi a copertura. □

Esempi di calcolo della riserva matematica sono proposti nella cartella Excel `lab3.xls`.

4.3 Uno schema contrattuale generale

Nella trattazione che segue, per non dovere ripetere i risultati per le varie tipologie contrattuali, faremo riferimento ad un contratto generico, che chiameremo *polizza generica*, che prevede:

- premi (anticipati) pagabili in caso vita: alla scadenza intera k il premio pagabile in caso vita sarà indicato con P_k.
- prestazioni caso morte (posticipate): alla scadenza intera k la prestazione pagabile in caso di morte a quella data sarà indicata con C_k^{m};
- prestazioni caso vita anticipate: alla scadenza intera k la prestazione anticipata pagabile in caso di vita a quella data sarà indicata con C_k^{va};
- prestazioni caso vita posticipate: alla scadenza intera k la prestazione posticipata pagabile in caso di vita a quella data sarà indicata con C_k^{vp}.

Supporremo infine che, nel caso di morte dell'assicurato al tempo k, il contratto si concluda con il pagamento della prestazione caso morte C_k^{m}.

Le polizze a premio unico rientrano nello schema ponendo $P_0 = U$ e $P_k = 0$ per $k > 0$. Le polizze che prevedono n premi annui (anticipati) costanti P rientrano nello schema ponendo $P_k = P$ per $0 \le k \le n-1$ e $P_k = 0$ per $k \ge n$.

La distinzione fra prestazioni caso vita anticipate e posticipate è necessaria per ricomprendere nello schema le prestazioni di rendita (immediata o differita), che può essere anticipata o posticipata. Per le polizze che prevedono una prestazione di capitale differito in caso di vita alla scadenza n si assumerà convenzionalmente che tale prestazione sia di tipo anticipato: è infatti una prestazione che copre il "danno" costituito dal fatto che l'assicurato è in vita nel periodo $[n, T_x)$ ed è pagata all'inizio del periodo.

Lo schema contrattuale delineato è sufficientemente generale da comprendere tutte le tipologie contrattuali descritte nella sezione 3, con l'eccezione dei contratti di capitalizzazione (che non sono polizze vita) e delle polizze a termine fisso, del resto poco frequenti. I risultati che otterremo saranno quindi validi per tutte le tipologie contrattuali, con le eccezioni appena esposte.

Se si considera una polizza generica stipulata al tempo zero da una testa di età x, ancora in essere al tempo t, la riserva matematica ${}_tV_x$ è calcolata considerando già liquidata la prestazione caso vita posticipata C_t^{vp} e non ancora pagati i premio P_t e la prestazione caso vita anticipata C_t^{vp}. La relazione tra riserva matematica e riserva di bilancio è quindi

$$ {}_tV_x^+ = {}_tV_x + P_t - C_t^{\mathrm{va}} \quad . \tag{144} $$

Si noti che il "completamento" della riserva prevede il premio P_t vada sommato (e non sottratto), perché nel calcolo della riserva matemtica si sottrae la riserva premi che comprende anche P_t. Per un motivo simmetrico nella (144) la prestazione C_t^{va} va sottratta (e non sommata), perché nel calcolo della riserva matematica tale prestazione si considera non ancora pagata e quindi compare nella riserva prestazioni con il segno postivo.

4.4 L'equazione di Fouret

Teorema 4.4.1 (equazione di Fouret). Se si considera al tempo t una polizza generica in essere a quella data, stipulata al tempo zero da una testa di età x e con tasso tecnico i, vale la relazione

$$ {}_tV_x + P_t - C_t^{\mathrm{va}} = {}_{t+1}V_x\, p_{x+t}\, v + C_{t+1}^{\mathrm{m}}\, q_{x+t}\, v + C_{t+1}^{\mathrm{vp}}\, p_{x+t}\, v \quad , \tag{145} $$

dove, come al solito, $v = (1+i)^{-1}$.

Dimostrazione. Considerando separatamente le prestazioni caso morte, caso vita posticipate, caso vita anticipate e i premi (anticipati) e tendendo presente le convenzioni sul calcolo della riserva matematica in t, si ha che

$$ {}_tV_x = \sum_{k>0} C_{t+k}^{\mathrm{m}}\, {}_{k-1|1}q_{x+t}\, v^k + \sum_{k>0} C_{t+k}^{\mathrm{vp}}\, {}_kp_{x+t}\, v^k + \sum_{k\ge 0} C_{t+k}^{\mathrm{va}}\, {}_kp_{x+t}\, v^k - \sum_{k\ge 0} P_{t+k}\, {}_kp_{x+t}\, v^k \quad . $$

Se scorporiamo il primo addendo di ciascuna delle quattro somme ($k = 1$ nelle prime due e $k = 0$ nelle seconde due) otteniamo

$$
\begin{aligned}
{}_tV_x = {} & C^{\mathrm{m}}_{t+1}\, {}_{0|1}q_{x+t}\, v + C^{\mathrm{vp}}_{t+1}\, {}_1p_{x+t}\, v + C^{\mathrm{va}}_t - P_t \\
& + \sum_{k>1} C^{\mathrm{m}}_{t+k}\, {}_{k-1|1}q_{x+t}\, v^k + \sum_{k>1} C^{\mathrm{vp}}_{t+k}\, {}_kp_{x+t}\, v^k + \sum_{k\geq 1} C^{\mathrm{va}}_{t+k}\, {}_kp_{x+t}\, v^k - \sum_{k\geq 1} P_{t+k}\, {}_kp_{x+t}\, v^k \quad .
\end{aligned}
$$

Osservando che, in base alle relazioni (42) e (49), risulta

$$
\begin{aligned}
{}_kp_{x+t} &= p_{x+t}\, {}_{k-1}p_{x+t+1} && \text{per } k \geq 1, \\
{}_{k-1|1}q_{x+t} &= p_{x+t}\, {}_{k-2|1}q_{x+t+1} && \text{per } k > 1,
\end{aligned}
$$

si ha che nelle quattro somme rimaste si può raccogliere il fattore comune $p_{x+t}\, v$, ottenendo

$$
\begin{aligned}
{}_tV_x = {} & C^{\mathrm{m}}_{t+1}\, {}_{0|1}q_{x+t}\, v + C^{\mathrm{vp}}_{t+1}\, {}_1p_{x+t}\, v + C^{\mathrm{va}}_t - P_t \\
& + \left(\sum_{k>1} C^{\mathrm{m}}_{t+k}\, {}_{k-2|1}q_{x+t+1}\, v^{k-1} + \sum_{k>1} C^{\mathrm{vp}}_{t+k}\, {}_{k-1}p_{x+t+1}\, v^{k-1} + \sum_{k\geq 1} C^{\mathrm{va}}_{t+k}\, {}_{k-1}p_{x+t+1}\, v^{k-1} \right. \\
& \qquad \left. - \sum_{k\geq 1} P_{t+k}\, {}_{k-1}p_{x+t+1}\, v^{k-1} \right) p_{x+t}\, v \quad .
\end{aligned}
$$

Operando nelle somme il cambiamento di variabile $j = k - 1$ (e quindi $k > 1$ diventa $j > 0$, $k \geq 1$ diventa $j > 0$ e $t+k$ diventa $t+1+j$) e ricordando che ${}_{0|1}q_{x+t} = q_{x+t}$ e che ${}_1p_{x+t} = p_{x+t}$ si ottiene

$$
\begin{aligned}
{}_tV_x = {} & C^{\mathrm{m}}_{t+1}\, q_{x+t}\, v + C^{\mathrm{vp}}_{t+1}\, p_{x+t}\, v + C^{\mathrm{va}}_t - P_t \\
& + \left(\sum_{j>0} C^{\mathrm{m}}_{t+1+j}\, {}_{j-1|1}q_{x+t+1}\, v^j + \sum_{j>0} C^{\mathrm{vp}}_{t+1+j}\, {}_jp_{x+t+1}\, v^j + \sum_{j\geq 0} C^{\mathrm{va}}_{t+1+j}\, {}_jp_{x+t+1}\, v^j \right. \\
& \qquad \left. - \sum_{j\geq 0} P_{t+1+j}\, {}_jp_{x+t+1}\, v^j \right) p_{x+t}\, v \quad .
\end{aligned}
$$

Osservando che l'espressione nella parentesi tonda del membro destro è la riserva matematica in $t + 1$ e riarrangiando i termini dell'equazione si ottiene la tesi. □

L'equazione di Fouret stabilisce una relazione ricorrente tra la riserva matematica in t e quella in $t + 1$. Se la si scrive risolta rispetto a ${}_{t+1}V_x$ si ottiene

$$
\begin{aligned}
{}_{t+1}V_x &= \frac{{}_tV_x + P_t - C^{\mathrm{va}}_t - C^{\mathrm{m}}_{t+1}\, q_{x+t}\, v - C^{\mathrm{vp}}_{t+1}\, p_{x+t}\, v}{p_{x+t}\, v} && (146) \\
&= \frac{{}_tV_x + P_t - C^{\mathrm{va}}_t}{p_{x+t}\, v} - C^{\mathrm{m}}_{t+1}\, \frac{1 - p_{x+t}}{p_{x+t}} - C^{\mathrm{vp}}_{t+1} && (147)
\end{aligned}
$$

e questa relazione può essere usata per il calcolo ricorrente della riserva, a partire dalla condizione iniziale ${}_0V_x = 0$.

Si osservi che, usando la (144), l'equazione di Fouret può essere scritta nella forma

$$
{}_tV^+_x = {}_{t+1}V_x\, p_{x+t}\, v + C^{\mathrm{m}}_{t+1}\, q_{x+t}\, v + C^{\mathrm{vp}}_{t+1}\, p_{x+t}\, v \quad . \tag{148}
$$

Esempio 4.4.1. Per una polizza di capitale differito C a premio annuo, con durata del differimento n, età dell'assicurato alla stipula x, tasso tecnico i e premio annuo $P = C\, {}_n\mathrm{E}_x / {}_n\ddot{a}_x$, l'equazione di Fouret assume la forma

$$
{}_tV_x + P = {}_{t+1}V_x\, p_{x+t}\, v
$$

per ogni $t = 0, 1, \ldots, n - 1$. □

Esempio 4.4.2. Per una polizza mista a premio annuo, con capitale assicurato C, durata n, età dell'assicurato alla stipula x, tasso tecnico i e premio annuo puro $P = C\,({}_n\mathrm{E}_x + {}_n\mathrm{A}_x)\,/\,{}_n\ddot{\mathrm{a}}_x$, l'equazione di Fouret assume la forma

$$ {}_tV_x + P = {}_{t+1}V_x\, p_{x+t}\, v + C\, q_{x+t}\, v $$

per ogni $t = 0,\, 1,\, \ldots,\, n-1$. □

Esempio 4.4.3. Si consideri una polizza di rendita vitalizia differita posticipata con controassicurazione a premio annuo, con rata della rendita R, durata del differimento n, età dell'assicurato alla stipula x, tasso tecnico i e premio annuo puro P e di tariffa Π.

Durante il differimento $(t < n)$ l'equazione di Fouret assume la forma

$$ {}_tV_x + P = {}_{t+1}V_x\, p_{x+t}\, v + t\Pi\, q_{x+t}\, v \ \ . $$

Nel periodo di godimento della rendita $(t \geq n)$ si ha invece

$$ {}_tV_x = {}_{t+1}V_x\, p_{x+t}\, v + R\, p_{x+t}\, v \ \ . $$

Se, ferme restando le rimanenti condizioni contrattuali, la rendita assicurata fosse anticipata anziché posticipata, la forma dell'equazione durante il differimento rimarrebbe invariata (ma i valori numerici di P e Π sarebbero diversi a parità di rata R). Nel periodo di godimento della rendita $(t \geq n)$ si avrebbe invece

$$ {}_nV_x - R = {}_{t+1}V_x\, p_{x+t}\, v \ \ . \quad \square $$

Esempi di uso dell'equazione di Fouret sono proposti nella cartella Excel `lab4.xls`.

4.5 Premio di rischio e premio di risparmio

Si consideri una polizza generica. Se si risolve l'equazione di Fouret (145) rispetto al premio P_t, si sostituisce $p_{x+t} = 1 - q_{x+t}$ e si riarrangiano un po' i termini:

$$ \begin{aligned} P_t &= {}_{t+1}V_x\, p_{x+t}\, v + C^{\mathrm{m}}_{t+1}\, q_{x+t}\, v + C^{\mathrm{vp}}_{t+1}\, p_{x+t}\, v + C^{\mathrm{va}}_t - {}_tV_x & (149)\\ &= C^{\mathrm{m}}_{t+1}\, q_{x+t}\, v + {}_{t+1}V_x\,(1 - q_{x+t})\, v - {}_tV_x + C^{\mathrm{va}}_t + C^{\mathrm{vp}}_{t+1}\,(1 - q_{x+t})\, v & (150)\\ &= \left(C^{\mathrm{m}}_{t+1} - C^{\mathrm{vp}}_{t+1} - {}_{t+1}V_x\right)\, q_{x+t}\, v + \left({}_{t+1}V_x\, v - {}_tV_x + C^{\mathrm{vp}}_{t+1}\, v + C^{\mathrm{va}}_t\right) & (151) \end{aligned} $$

si ottiene una scomposizione notevole del premio P_t. Se si pone

$$ P^{\mathrm{R}}_t = \left(C^{\mathrm{m}}_{t+1} - C^{\mathrm{vp}}_{t+1} - {}_{t+1}V_x\right)\, q_{x+t}\, v \tag{152} $$

e

$$ P^{\mathrm{S}}_t = {}_{t+1}V_x\, v - {}_tV_x + C^{\mathrm{vp}}_{t+1}\, v + C^{\mathrm{va}}_t \tag{153} $$

si ha che

$$ P_t = P^{\mathrm{R}}_t + P^{\mathrm{S}}_t \ \ . \tag{154} $$

Il primo addendo della scomposizione (154) è il *premio di rischio* P^{R}_t. È uguale al *capitale sotto rischio* $C^{\mathrm{m}}_{t+1} - C^{\mathrm{vp}}_{t+1} - {}_{t+1}V_x$ probabilizzato e scontato. Nel caso l'assicurato deceda al tempo $t+1$, l'assicuratore dovrà corrispondere la prestazione caso morte C^{m}_{t+1} e non pagherà la prestazione caso vita posticipata C^{vp}_{t+1}; poiché avrà a dispozione la riserva ${}_{t+1}V_x$, se questa sarà minore della prestazione netta $C^{\mathrm{m}}_{t+1} - C^{\mathrm{vp}}_{t+1}$ egli subirà una perdita pari al capitale sotto rischio. Naturalmente, nel caso opposto di riserva maggiore della prestazione netta, il capitale sotto rischio è negativo e l'assicuratore avrà un guadagno anziché una perdita. Il premio di rischio è quindi il valore attuale attuariale in t della perdita che l'assicuratore subirà per il caso morte al tempo $t+1$. La (152) quantifica quindi la parte del premio P_t che copre (in aspettativa) la perdita dell'assicuratore per il caso morte al tempo $t+1$.

Il secondo addendo della scomposizione è il *premio di risparmio* P_t^{S}. È quello che rimane del premio P_t dopo che è stata scorporata la componente di rischio; va a finanziare la prestazione anticipata caso vita in t, la prestazione posticipata caso vita in $t+1$ e quelle (vita e morte) successive.

La scomposizione (154) è particolarmente significativa per polizze a premio annuo, ma può essere effettuata anche per polizze a premio unico. In tale caso, essendo nulli i premi successivi al primo, si avrà che premio di rischio e premio di risparmio sono uguali in valore assoluto ma di segno opposto.

La notazione usata per indicare il premio di rischio e il premio di risparmio è quella della tradizione attuariale; gli apici "R" e "S" sono le iniziali di "Risiko" (ted.: rischio) e "sparen" (ted.: risparmiare).

Esempio 4.5.1. In una polizza temporanea caso morte a premio annuo (puro) P, con capitale assicurato C, durata n anni, tasso tecnico i ed età alla stipula x, il premio di rischio e il premio di risparmio al tempo t assumono la forma

$$\begin{aligned} P_t^{\mathrm{R}} &= \left(C_{t+1}^{\mathrm{m}} - {}_{t+1}V_x\right)\, q_{x+t}\, v = \left[C\left(1 - {}_{n-t-1}\mathrm{A}_{x+t+1}\right) + P\, {}_{n-t-1}\ddot{\mathrm{a}}_{x+t+1}\right] q_{x+t}\, v \ , \\ P_t^{\mathrm{S}} &= {}_{t+1}V_x\, v - {}_tV_x = C\left({}_{n-t-1}\mathrm{A}_{x+t+1}\, v - {}_{n-t}\mathrm{A}_{x+t}\right) - P\left({}_{n-t-1}\ddot{\mathrm{a}}_{x+t+1}\, v - {}_{n-t}\ddot{\mathrm{a}}_{x+t}\right) . \end{aligned}$$

In questa tipologia contrattuale non ci sono capitali caso vita nel corso della durata della polizza che complicano la logica delle espressioni. Il premio di rischio è il valore attuale attuariale dell'integrazione di riserva che l'assicuratore deve operare al tempo $t+1$ per pagare la prestazione caso morte. Il premio di risparmio va a incrementare la riserva in $t+1$ per finanziare le prestazioni successive: si ha infatti ${}_{t+1}V_x = \left({}_tV_x + P_t^{\mathrm{S}}\right)(1+i)$. □

Esempio 4.5.2. In una polizza mista a premio annuo (puro) P, con capitale assicurato C, durata n anni, tasso tecnico i ed età alla stipula x, il premio di rischio e il premio di risparmio al tempo t assumono la forma

$$\begin{aligned} P_t^{\mathrm{R}} &= \left(C_{t+1}^{\mathrm{m}} - {}_{t+1}V_x\right)\, q_{x+t}\, v \\ &= \left[C\left(1 - {}_{n-t-1}\mathrm{E}_{x+t+1 n-t-1}\mathrm{A}_{x+t+1}\right) + P\, {}_{n-t-1}\ddot{\mathrm{a}}_{x+t+1}\right] q_{x+t}\, v \ , \\ P_t^{\mathrm{S}} &= {}_{t+1}V_x\, v - {}_tV_x \\ &= C\left({}_{n-t-1}\mathrm{E}_{x+t+1}\, v + {}_{n-t-1}\mathrm{A}_{x+t+1}\, v - {}_{n-t}\mathrm{E}_{x+t} - {}_{n-t}\mathrm{A}_{x+t}\right) \\ &\quad - P\left({}_{n-t-1}\ddot{\mathrm{a}}_{x+t+1}\, v - {}_{n-t}\ddot{\mathrm{a}}_{x+t}\right) \ . \end{aligned}$$

Si osservi che per $t = n-1$, la scomposizione dell'ultimo premio annuo fornisce Per $t = n-1$, la scomposizione dell'ultimo premio annuo è

$$\begin{aligned} P_{n-1}^{\mathrm{R}} &= \left(C_n^{\mathrm{m}} - {}_nV_x\right)\, q_{x+n-1}\, v = 0 \ , \\ P_{n-1}^{\mathrm{S}} &= P - P_{n-1}^{\mathrm{R}} = P \ , \end{aligned}$$

che mostra come l'ultimo premio annuo sia tutto premio di risparmio. □

Esempio 4.5.3. In una rendita vitalizia immediata, posticipata e temporanea a premio annuo (puro) P, con rata della rendita R, durata n anni, tasso tecnico i ed età alla stipula x, il premio di rischio e il premio di risparmio al tempo t assumono la forma

$$\begin{aligned} P_t^{\mathrm{R}} &= \left(-C_{t+1}^{\mathrm{vp}} - {}_{t+1}V_x\right)\, q_{x+t}\, v = -\left[R\left(1 + {}_{n-t-1}\mathrm{a}_{x+t+1}\right) - P\, {}_{n-t-1}\ddot{\mathrm{a}}_{x+t+1}\right] q_{x+t}\, v \ , \\ P_t^{\mathrm{S}} &= {}_{t+1}V_x\, v + C_{t+1}^{\mathrm{vp}}\, v - {}_tV_x = R\left({}_{n-t-1}\mathrm{a}_{x+t+1}\, v - {}_{n-t}\mathrm{a}_{x+t}\right) - P\left({}_{n-t-1}\ddot{\mathrm{a}}_{x+t+1}\, v - {}_{n-t}\ddot{\mathrm{a}}_{x+t}\right) . \end{aligned}$$

Il premio di rischio è negativo, perché in caso di morte dell'assicurato al tempo $t+1$ l'assicuratore ha un profitto in quanto omette di versare la rata e incamera la riserva. □

Esempi di calcolo del premio di rischio e del premio di risparmio sono proposti nella cartella Excel `lab4.xls`.

4.6 La riserva retrospettiva

Sempre nel caso della polizza generica, se si parte dall'equazione di Fouret scritta nella forma

$$ {}_tV_x + P_t - C_t^{\mathrm{va}} = {}_{t+1}V_x\,(1-q_{x+t})\,v + C_{t+1}^{\mathrm{m}}\,q_{x+t}\,v + C_{t+1}^{\mathrm{vp}}\,(1-q_{x+t})\,v \ , \tag{155} $$

poiché nel membro sinistro compare $P_t = P_t^{\mathrm{S}} + P_t^{\mathrm{R}}$ e nel membro destro compare $P_t^{\mathrm{R}} = C_{t+1}^{\mathrm{m}}\,q_{x+t}\,v - C_{t+1}^{\mathrm{vp}}\,q_{x+t}\,v - {}_{t+1}V_x\,q_{x+t}\,v$, semplificando il premio di rischio si ottiene

$$ {}_tV_x + P_t^{\mathrm{S}} - C_t^{\mathrm{va}} = \left({}_{t+1}V_x + C_{t+1}^{\mathrm{vp}}\right)\,v \ , \tag{156} $$

cioè

$$ {}_{t+1}V_x = \left({}_tV_x + P_t^{\mathrm{S}} - C_t^{\mathrm{va}}\right)(1+i) - C_{t+1}^{\mathrm{vp}} \ . \tag{157} $$

La (157) è un'espressione particolarmente significativa perché mostra come la riserva in $t+1$ si ottenga partendo dalla riserva in t, togliendo la prestazione caso vita anticipata in t, aumentando il risultato del premio di risparmio, capitalizzando il tutto al tasso tecnico e togliendo la prestazione caso vita posticipata in $t+1$. Nell'espressione non compaiono esplicitamente la prestazione caso morte in $t+1$, né le probabilità di sopravvivienza.

Partendo dalla solita condizione iniziale ${}_0V_x = 0$ e applicando ricorsivamente la (157) si ottiene

$$
\begin{aligned}
{}_0V_x &= 0 \ , && (158)\\
{}_1V_x &= \left({}_0V_x + P_0^{\mathrm{S}} - C_0^{\mathrm{va}}\right)(1+i) - C_1^{\mathrm{vp}} && (159)\\
&= \left(P_0^{\mathrm{S}} - C_0^{\mathrm{va}}\right)(1+i) - C_1^{\mathrm{vp}} \ , && (160)\\
{}_2V_x &= \left({}_1V_x + P_1^{\mathrm{S}} - C_1^{\mathrm{va}}\right)(1+i) - C_2^{\mathrm{vp}} && (161)\\
&= \left(P_0^{\mathrm{S}} - C_0^{\mathrm{va}}\right)(1+i)^2 + \left(P_1^{\mathrm{S}} - C_1^{\mathrm{va}}\right)(1+i) - C_1^{\mathrm{vp}}(1+i) - C_2^{\mathrm{vp}} \ , && (162)\\
{}_3V_x &= \left({}_2V_x + P_2^{\mathrm{S}} - C_2^{\mathrm{va}}\right)(1+i) - C_3^{\mathrm{vp}} && (163)\\
&= \sum_{k=0}^{2}\left(P_k^{\mathrm{S}} - C_k^{\mathrm{va}}\right)(1+i)^{3-k} - \sum_{k=0}^{2} C_{k+1}^{\mathrm{vp}}(1+i)^{3-k-1} \ , && (164)\\
&\dots && (165)\\
{}_tV_x &= \sum_{k=0}^{t-1}\left(P_k^{\mathrm{S}} - C_k^{\mathrm{va}}\right)(1+i)^{t-k} - \sum_{k=0}^{t-1} C_{k+1}^{\mathrm{vp}}(1+i)^{t-k-1} \ . && (166)
\end{aligned}
$$

La (166) è la soluzione in forma chiusa dell'equazione ricorrente (157) e mostra come la riserva in t sia il montante puramente finanziario dei premi di risparmio incassati fino a t (escluso), privati delle prestazioni caso vita anticipate pagate fino alla stessa data, meno il montante puramente finanziario delle prestazioni caso vita posticipate liquidate fino a t (compreso). Mostra quindi come la riserva venga costituita dal monante dei premi di risparmio al tasso tecnico, a cui dal quale vengono però via via prelevate le risorse finanziarie per pagare le prestazioni caso vita. Il risultato è particolarmente significativo per forme contrattuali che non prevedono prestazioni caso vita prima di una certa scadenza (ad esempio polizze di capitale o rendita differita e polizze miste): fino a quella scadenza la riserva matematica è il montante finanziario dei premi di risparmio.

In base a questo risultato risulta chiaro come l'assicuratore debba gestire la polizza. Nell'ipotesi del I ordine egli riesce infatti a investire esattamente al tasso tecnico e paga le prestazioni secondo quanto previsto dalla base demografica del I ordine. In queste ipotesi, quindi, se l'assicuratore ogni anno:

- incassa i premi puri (a inizio anno),
- paga le prestazioni caso vita anticipate (a inizio anno),
- investe quello che rimane;
- paga le prestazioni caso morte (a fine anno),
- paga le prestzioni caso vita posticipate (a fine anno),

si ritrova con un valore degli attivi che è esattamente uguale alla riserva matematica, cioè al valore residuo netto del suo impegno verso gli assicurati. È quindi coperto.

Naturalmente non è assolutamente detto che le ipotesi del I ordine si verifichino nella realtà, ma se sono sufficientemente prudenziali l'assicuratore ha una certa garanzia di rimanere coperto.

L'espressione (166) viene solitamente chiamata la *riserva retrospettiva*. Per la polizza generica che abbiamo considerato abbiamo visto quindi che la riserva retrospettiva coincide con la riserva prospettiva. Questo fatto non è vero in generale: ci sono forme assicurative nelle quale le due grandezze non coicidono. Si osservi che, per la polizza generica, la differenza fra la forma prospettiva e retrospettiva della riserva è concettualmente analoga alla differenza fra valore montante e valore residuo in una operazione puramente finanziaria: anche in quel caso, se l'operazione finanziaria è equa alla data di valutazione, le due grandezze coincidono.

4.7 La riserva come variabile aleatoria

Occorre osservare che la riserva matematica ${}_tV_x$ al tempo t è stata definita per polizze ancora in essere alla data t. Per la polizza generica, ciò significa che la riserva matematica è stata definita solo per una polizza in cui l'assicurato sia in vita al tempo t. In particolare, prima del tempo t, la riserva matematica non è nota ma è una variabile aleatoria, che varrà ${}_tV_x$ se l'assicurato sarà in vita al tempo t, zero se sarà morto al tempo t. In forma compatta si può scrivere la riserva matematica in t come ${}_tV_x\,\mathbf{1}_{\{T_x>t\}}$. Di questa variabile aleatoria si può calcolare l'aspettativa: in zero vale ad esempio $\mathrm{E}_0\left[{}_tV_x\,\mathbf{1}_{\{T_x>t\}}\right] = {}_tV_x\,{}_tp_x$.

5 Il valore intrinseco

5.1 Introduzione

La polizza è equa per costruzione, ma rispetto alla base tecnica del I ordine, che è aggravata in modo prudenziale rispetto alle aspettative dell'assicuratore. Egli si aspetta quindi che, nella realtà, si verifichi una rottura dell'equilibrio a suo favore, cioè che il contratto generi *utili*.

In questa sezione si assume fissata una base tecnica del II ordine, che riflette le aspettative dell'assicuratore. Le aspettative e le probabilità calcolate secondo questa base verranno indicate con l'apice "II". Quando sarà opportuno evidenziare la differenza fra aspettative e probabilità del I e del secondo ordine, anche quelle del I ordine potranno avere l'apice "I".

5.2 L'utile

Si consideri al tempo t una polizza generica in essere, stiupulata al tempo zero da un assicurato di età x; in particolare si assume che l'assicurato sia in vita al tempo t, cioè che $T_x > t$. Come si è discusso nella sezione precedente, al tempo t, dopo avere incassato l'eventuale premio e pagata l'eventuale prestazione anticipata caso vita, l'assicuratore investe la riserva di bilancio ${}_tV_x^+$ della polizza. Il rendimento I_{t+1} degli attivi a copertura nel periodo $[t, t+1]$ è in generale una variabile aleatoria al tempo t e diverrà nota al tempo $t+1$. Alla fine dell'anno, al tempo $t+1$, l'assicuratore

- ha un portafoglio di attivi con valore ${}_tV_x^+(1 + I_{t+1})$,
- deve pagare la prestazione caso morte $C_{t+1}^{\mathrm{m}}\,\mathbf{1}_{\{T_x \le t+1\}}$,
- deve pagare la prestazione caso vita posticipata $C_{t+1}^{\mathrm{vp}}\,\mathbf{1}_{\{T_x > t+1\}}$,
- deve ricostituire la riserva matematica ${}_tV_x\,\mathbf{1}_{\{T_x > t+1\}}$.

Si noti che tutte le grandezze che compaiono nell'elenco sono alteatorie al tempo t e diventeranno note al tempo $t+1$. L'aleatorietà del valore degli attivi è di tipo unicamente finanziario, mentre l'aleatorietà delle altre grandezze è legata solo alla durata della vita dell'assicurato.[13]

Al tempo $t+1$, dopo avere pagato le prestazioni e avere ricostituito la riserva, l'assicuratore si troverà nella posizione finanziaria netta

$$U_{t+1} = {}_tV_x^+(1 + I_{t+1}) - C_{t+1}^{\mathrm{m}}\,\mathbf{1}_{\{T_x \le t+1\}} - C_{t+1}^{\mathrm{vp}}\,\mathbf{1}_{\{T_x > t+1\}} - {}_{t+1}V_x\,\mathbf{1}_{\{T_x > t+1\}} \;. \tag{167}$$

Se U_{t+1} dovesse rivelarsi postivo, sarà l'importo "avanzato" che l'assicuratore potrà "staccare"; se invece dovesse essere $U_{t+1} < 0$, gli attivi a copertura della polizza non saranno stati sufficienti a pagare le prestazioni dell'anno e a ricostituire la riserva: l'assicuratore dovrà quindi integrare con capitale proprio per onorare gli impegni nei confronti dell'assicurato. La grandezza U_{t+1} è quindi l'*utile* (in senso algebrico: utile effettivo se positivo, disutile se negativo) prodotto dalla polizza nell'anno $[t, t+1]$ e temporalmente collocato al tempo t.

5.3 La scomposizione dell'utile: la formula di Homans

L'equazione di Fouret (145) può essere riscritta nella forma

$$0 = {}_tV_x^+(1 + i) - C_{t+1}^{\mathrm{m}}\,q_{x+t} - C_{t+1}^{\mathrm{vp}}\,p_{x+t} - {}_{t+1}V_x\,p_{x+t} \;. \tag{168}$$

[13] Si osservi che anche la riserva che l'assicuratore dovrà effetivamente ricostituire al tempo $t+1$ è aleatoria, perché se l'assicurato dovesse decedere in $[t, t+1]$ il contratto si risolverà con la prestazione caso morte e l'assicuratore non dovrà ricostituire alcuna riserva.

È significativo confrontare la (168) con la (167). Nel membro destro della (168) compaiono le aspettative del I ordine in t delle grandezze aleatorie che compaiono nel membro destro della (167):

$$i = \mathrm{E}_t^{\mathrm{I}}(I_{t+1}) \;^{14}, \tag{169}$$

$$q_{x+t} = \mathrm{E}_t^{\mathrm{I}}\left(\mathbf{1}_{\{T_x \le t+1\}}\right) \quad , \tag{170}$$

$$p_{x+t} = \mathrm{E}_t^{\mathrm{I}}\left(\mathbf{1}_{\{T_x > t+1\}}\right) \quad . \tag{171}$$

Il membro destro della (168) è pertanto l'aspettativa del I ordine fatta al tempo t del membro destro della (167). Quindi anche il membro sinistro della (168) è uguale all'aspettativa del I ordine fatta al tempo t del membro sinistro della (167), cioè

$$\mathrm{E}_t^{\mathrm{I}}(U_{t+1}) = 0 \quad ,$$

che è un altro modo di esprimere l'equilibrio del contratto al tempo t secondo la base tecnica del I ordine.

Un altro modo interessante di confrontare la (167) con la (168) è quello di sottrarre membro a membro la seconda dalla prima, ottenendo:

$$U_{t+1} = {}_tV_x^+(I_{t+1} - i) - C_{t+1}^{\mathrm{m}}\left(\mathbf{1}_{\{T_x \le t+1\}} - q_{x+t}\right) - \left({}_{t+1}V_x + C_{t+1}^{\mathrm{vp}}\right)\left(\mathbf{1}_{\{T_x > t+1\}} - p_{x+t}\right) \quad . \tag{172}$$

Osservando che $\mathbf{1}_{\{T_x > t+1\}} = 1 - \mathbf{1}_{\{T_x \le t+1\}}$, che $p_{x+t} = 1 - q_{x+t}$ e quindi che

$$\mathbf{1}_{\{T_x > t+1\}} - p_{x+t} = -\left(\mathbf{1}_{\{T_x \le t+1\}} - q_{x+t}\right) \quad ,$$

si ottiene una versione della *formula di contribuzione di Homans*

$$U_{t+1} = {}_tV_x^+(I_{t+1} - i) - \left(C_{t+1}^{\mathrm{m}} - C_{t+1}^{\mathrm{vp}} - {}_{t+1}V_x\right)\left(\mathbf{1}_{\{T_x \le t+1\}} - q_{x+t}\right) \quad , \tag{173}$$

che scompone l'utile aleatorio in $t+1$ in due componenti, ciascuna che risente di un'unica fonte di incertezza. La prima è l'*utile finanziario*

$$U_{t+i}^{\mathrm{f}} = {}_tV_x^+(I_{t+1} - i) \tag{174}$$

ed è direttamente proporzionale al sovrarendimento degli attivi rispetto al tasso tecnico, con costante di proporzionalità la riserva di bilancio in t, che rappresenta il capitale gestito dall'assicuratore nell'anno $[t, t+1]$. L'entità (e il segno) dell'utile finanziario dipende quindi dal risultato della gestione degli attivi e dalla massa gestita. La seconda componente è l'*utile da mortalità*

$$U_{t+1}^{\mathrm{m}} = -\left(C_{t+1}^{\mathrm{m}} - C_{t+1}^{\mathrm{vp}} - {}_{t+1}V_x\right)\left(\mathbf{1}_{\{T_x \le t+1\}} - q_{x+t}\right) \tag{175}$$

ed è direttamente proporzionale alla sovramortalità che si verificherà rispetto a quella prevista dalla base del I ordine, con costante di proporzionalità l'opposto del capitale sotto rischio nell'anno $[t, t+1]$. L'entità e, soprattutto, il segno dell'utile da mortalità dipendono quindi dall'entità e dal segno del capitale sotto rischio e della sovramortalità: con capitale sotto rischio positivo (come è tipicamente il caso in una polizza temporanea caso morte o mista, ad esempio), si ha disutile in caso di sovramortalità rispetto all'aspettativa del I ordine, utile in caso di sottomortalità.

[14] La base tecnica finanziaria del I ordine è una legge esponenziale di equivalenza finanziaria di tasso annuo i. Pertanto, al primo ordine, l'aspettativa del rendimento degli attivi è il il tasso i. Si osservi che, poiché i è costante, dalla $\mathrm{E}_t(I_{t+1})) = i$ si ricava $\mathrm{E}_{t'}(I_{t+1})) = \mathrm{E}_{t'}[\mathrm{E}_t(I_{t+1}))] = \mathrm{E}_{t'}(i) = i$ per ogni $t' \le t$.

L'aspettativa (del II ordine) in t dell'utile e delle sue componenti è data dalle espressioni

$$\mathrm{E}_t^{\mathrm{II}}(U_{t+1}) = {}_tV_x^+ \left(\mathrm{E}_t^{\mathrm{II}}(I_{t+1}) - i\right) - \left(C_{t+1}^{\mathrm{m}} - C_{t+1}^{\mathrm{vp}} - {}_{t+1}V_x\right)\left(q_{x+t}^{\mathrm{II}} - q_{x+t}^{\mathrm{I}}\right) \ , \tag{176}$$

$$\mathrm{E}_t^{\mathrm{II}}(U_{t+1}^{\mathrm{f}}) = {}_tV_x^+ \left(\mathrm{E}_t^{\mathrm{II}}(I_{t+1}) - i\right) \ , \tag{177}$$

$$\mathrm{E}_t^{\mathrm{II}}(U_{t+1}^{\mathrm{m}}) = -\left(C_{t+1}^{\mathrm{m}} - C_{t+1}^{\mathrm{vp}} - {}_{t+1}V_x\right)\left(q_{x+t}^{\mathrm{II}} - q_{x+t}^{\mathrm{I}}\right) \ , \tag{178}$$

che rappresentano la versione in aspettativa della formula di contribuzione di Homans.

Osservazione 5.3.1. L'utile U_{t+1} e la relativa scomposizione sono stati calcolati nell'ipotesi che la polizza sia in essere alla data t. Per la polizza generica che stiamo considerando, ciò comporta che l'utile è U_{t+1} se l'assicurato è in vita in t, è zero altrimenti. Se quindi si ragiona ad un istante che precede t, per esempio al tempo zero di emissione della polizza, l'utile che la polizza esprimerà in $t+1$ è dato da $U_{t+1}\,\mathbf{1}_{\{T_x>t\}}$. □

5.4 La valutazione degli utili: il metodo RAD

Fissata una polizza, nel paragrafo precedente abbiamo visto come questa dia origine alla successione di utili aleatori $U_1\,\mathbf{1}_{\{T_x>0\}}$, $U_2\,\mathbf{1}_{\{T_x>1\}}$, $U_3\,\mathbf{1}_{\{T_x>2\}}$, $\ldots$. È chiara l'esigenza di *valutare* questi utili alla data di stipula del contratto – o meglio, nella fase di progettazione del contratto – per fare un profit-test della polizza.[15] In questo paragrafo discuteremo il metodo di valutazione *Risk Adjusted Discounting* (*RAD*), ampiamente usato nella pratica operativa.

Si consideri una polizza generica, stipulata da una testa di età x anni, con una certa fissata base tecnica demografica del I ordine e con tasso tecnico i. Si consideri fissata anche la base tecnica del II ordine, espressione delle opinioni probabilistiche dell'assicuratore. In particolare, siano quindi fissate le aspettative dei rendimenti degli attivi $\mathrm{E}_0^{\mathrm{II}}(I_1)$, $\mathrm{E}_0^{\mathrm{II}}(I_2)$, $\mathrm{E}_0^{\mathrm{II}}(I_3)$, $\ldots$ alla data di valutazione, coincidente con la data di stipula. Applicando la formula di contribuzione di Homans, l'aspettativa (del II ordine) alla data di valutazione dell'utile al tempo $k>0$ è data da

$$\mathrm{E}_0^{\mathrm{II}}\left(U_k\,\mathbf{1}_{\{T_x>k-1\}}\right) = \mathrm{E}_0^{\mathrm{II}}\left(U_k^{\mathrm{f}}\,\mathbf{1}_{\{T_x>k-1\}}\right) + \mathrm{E}_0^{\mathrm{II}}\left(U_k^{\mathrm{m}}\,\mathbf{1}_{\{T_x>k-1\}}\right) \ . \tag{179}$$

Calcoliamo separatamente l'utile finanziario atteso e l'utile da mortalità atteso.

Per quanto riguarda il primo, sappiamo che la grandezza U_k^{f} risente solamente di incertezza di tipo finanziario, mentre l'aleatorietà della funzione indicatrice $\mathbf{1}_{\{T_x>k-1\}}$ è quella della durata della vita dell'assicurato. Possiamo senz'altro accettare come ipotesi della valutazione che durata della vita dell'assicurato e l'evoluzione del mercato finanziario siano indipendenti e fattorizzare quindi

$$\mathrm{E}_0^{\mathrm{II}}\left(U_k^{\mathrm{f}}\,\mathbf{1}_{\{T_x>k-1\}}\right) = \mathrm{E}_0^{\mathrm{II}}\left(U_k^{\mathrm{f}}\right)\,\mathrm{E}_0^{\mathrm{II}}\left(\mathbf{1}_{\{T_x>k-1\}}\right) \ .$$

Applicando nel primo fattore del membro destro la (174), si ottiene per linearità che

$$\mathrm{E}_0^{\mathrm{II}}\left(U_k^{\mathrm{f}}\right) = \mathrm{E}_0^{\mathrm{II}}\left[{}_{k-1}V_x^+\,(I_k - i)\right] = {}_{k-1}V_x^+\left[\mathrm{E}_0^{\mathrm{II}}(I_k) - i\right] \ .$$

D'altro canto

$$\mathrm{E}_0^{\mathrm{II}}\left(\mathbf{1}_{\{T_x>k-1\}}\right) = \mathrm{prob}^{\mathrm{II}}(T_x > k-1 \,|\, T_x > 0) = {}_{k-1}p_x^{\mathrm{II}} \ .$$

[15] È molto interessante anche la valutazione degli utili residui di un contratto già in essere alla data di valutazione. Per semplicità non tratteremo esplicitamente questo caso, che però è facilmente ricavabile dallo schema di valutazione all'emissione, con le ovvie modifiche.

L'utile finanziario atteso alla data di valutazione è pertanto

$$\mathrm{E}_0^{\mathrm{II}}\left(U_k^{\mathrm{f}}\,\mathbf{1}_{\{T_x>k-1\}}\right) = {}_{k-1}V_x^+\,[\mathrm{E}_0^{\mathrm{II}}(I_k) - i]\,{}_{k-1}p_x^{\mathrm{II}}\;. \tag{180}$$

È quindi direttamente proporzionale alla massa gestita, al sovrarendimento atteso rispetto al tasso tecnico e alla probabilità che la polizza sia in essere all'inizio dell'anno di riferimento.

Per il calcolo dell'utile da mortalità atteso, applicando la (175), la linearità dell'aspettativa e osservando che $\mathbf{1}_{\{T_x\le k\}}\,\mathbf{1}_{\{T_x>k-1\}} = \mathbf{1}_{\{k-1<T_x\le k\}}$, si ha che

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_0^{\mathrm{II}}\left(U_k^{\mathrm{m}}\,\mathbf{1}_{\{T_x>k-1\}}\right) &= -\left(C_k^{\mathrm{m}} - C_k^{\mathrm{vp}} - {}_kV_x\right)\mathrm{E}_0^{\mathrm{II}}\left[\left(\mathbf{1}_{\{T_x\le k\}} - q_{x+k-1}^{\mathrm{I}}\right)\mathbf{1}_{\{T_x>k-1\}}\right]\\ &= -\left(C_k^{\mathrm{m}} - C_k^{\mathrm{vp}} - {}_kV_x\right)\left[\mathrm{E}_0^{\mathrm{II}}\left(\mathbf{1}_{\{k-1<T_x\le k\}}\right) - q_{x+k-1}^{\mathrm{I}}\,\mathrm{E}_0^{\mathrm{II}}\left(\mathbf{1}_{\{T_x>k-1\}}\right)\right]\;.\end{aligned}$$

Poiché

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_0^{\mathrm{II}}\left(\mathbf{1}_{\{k-1<T_x\le k\}}\right) &= {}_{k-1|1}q_x^{\mathrm{II}}\;,\\ \mathrm{E}_0^{\mathrm{II}}\left(\mathbf{1}_{\{T_x>k-1\}}\right) &= {}_{k-1}p_x^{\mathrm{II}}\;,\end{aligned}$$

usando la (47) per le probabilità del II ordine si ottiene

$$\mathrm{E}_0^{\mathrm{II}}\left(U_k^{\mathrm{m}}\,\mathbf{1}_{\{T_x>k-1\}}\right) = -\left(C_k^{\mathrm{m}} - C_k^{\mathrm{vp}} - {}_kV_x\right)\left({}_{k-1|1}q_x^{\mathrm{II}} - q_{x+k-1}^{\mathrm{I}}\,{}_{k-1}p_x^{\mathrm{II}}\right) \tag{181}$$

$$= -\left(C_k^{\mathrm{m}} - C_k^{\mathrm{vp}} - {}_kV_x\right)\left(q_{x+k-1}^{\mathrm{II}} - q_{x+k-1}^{\mathrm{I}}\right){}_{k-1}p_x^{\mathrm{II}}\;. \tag{182}$$ [16]

L'utile da mortalità atteso è quindi direttamente proporzionale all'opposto del capitale sotto rischio, alla sovramortalità attesa e alla probabilità che la polizza sia in essere all'inizio dell'anno di riferimento.

Dopo avere calcolato l'utile atteso occorre scontatarlo dalla data k alla quale è temporalmente collocato alla data di valutazione. Il tasso da usare non può essere naturalmente il tasso di interesse privo di rischio espresso dal mercato obbligazionario, ma va opportunamente aumentato per compensare il rischio insito nell'utile, che è stato "sterilizzato" dal calcolo dell'aspettativa. Il tasso *aggiustato per il rischio* (*risk adjusted*) così ottenuto è il *tasso RAD* j che, nella pratica operativa, per semplicità si considera spesso costante e noi seguiremo questa linea; nulla vieta naturalmente di utilizzare una struttura per scadenza di tassi di interesse non piatta. Indicando quindi con $V(0,\cdot)$ il valore calcolato nel senso RAD, il valore in zero dell'utile al tempo k è la somma del valore dell'utile finanziario e dell'utile da mortalità

$$V\left(0,U_k\,\mathbf{1}_{\{T_x>k-1\}}\right) = V\left(0,U_k^{\mathrm{f}}\,\mathbf{1}_{\{T_x>k-1\}}\right) + V\left(0,U_k^{\mathrm{m}}\,\mathbf{1}_{\{T_x>k-1\}}\right)\;, \tag{183}$$

essendo

$$V\left(0,U_k^{\mathrm{f}}\,\mathbf{1}_{\{T_x>k-1\}}\right) = \mathrm{E}_0^{\mathrm{II}}\left(U_k^{\mathrm{f}}\,\mathbf{1}_{\{T_x>k-1\}}\right)(1+j)^{-k} \tag{184}$$

$$= {}_{k-1}V_x^+\,[\mathrm{E}_0^{\mathrm{II}}(I_k) - i]\,{}_{k-1}p_x^{\mathrm{II}}\,(1+j)^{-k}\;, \tag{185}$$

$$V\left(0,U_k^{\mathrm{m}}\,\mathbf{1}_{\{T_x>k-1\}}\right) = \mathrm{E}_0^{\mathrm{II}}\left(U_k^{\mathrm{m}}\,\mathbf{1}_{\{T_x>k-1\}}\right)(1+j)^{-k} \tag{186}$$

$$= -\left(C_k^{\mathrm{m}} - C_k^{\mathrm{vp}} - {}_kV_x\right)\left(q_{x+k-1}^{\mathrm{II}} - q_{x+k-1}^{\mathrm{I}}\right){}_{k-1}p_x^{\mathrm{II}}\,(1+j)^{-k}\;. \tag{187}$$

[16] Per semplicità di notazione si è assunto che anche la distribuzione di probabilità del II ordine sia costruita secondo il modello tradizionale e, quindi, che valga la (47): ${}_{k-1|1}q_x^{\mathrm{II}} = q_{x+k-1}^{\mathrm{II}}\,{}_{k-1}p_x^{\mathrm{II}}$. Se si vuole rimuovere questa assunzione non si può fare l'ultimo passaggio del calcolo e bisogna fermarsi all'epressione (181) che, rispetto alla (182) ha solo uno svantaggio "estetico".

Il valore complessivo del flusso $\boldsymbol{U}$ degli utili, che si chiama *valore intrinseco*, è la somma del valore degli utili estesa a tutti gli anni di polizza

$$V(0,\boldsymbol{U}) = \sum_{k>0} \mathrm{E}_0^{\mathrm{II}}\left(U_k\, \mathbf{1}_{\{T_x>k-1\}}\right)\,(1+j)^{-k} \tag{188}$$

ed è naturalmente scomposto nel *valore intrinseco finanziario*

$$V(0,\boldsymbol{U}^{\mathrm{f}}) = \sum_{k>0} \mathrm{E}_0^{\mathrm{II}}\left(U_k^{\mathrm{f}}\, \mathbf{1}_{\{T_x>k-1\}}\right)\,(1+j)^{-k} \tag{189}$$

$$= \sum_{k>0} {}_{k-1}V_x^+\,[\mathrm{E}_0^{\mathrm{II}}(I_k)-i]\,{}_{k-1}p_x^{\mathrm{II}}\,(1+j)^{-k} \tag{190}$$

e nel *valore intrinseco da mortalità*

$$V(0,\boldsymbol{U}^{\mathrm{m}}) = \sum_{k>0} \mathrm{E}_0^{\mathrm{II}}\left(U_k^{\mathrm{m}}\, \mathbf{1}_{\{T_x>k-1\}}\right)\,(1+j)^{-k} \tag{191}$$

$$= -\sum_{k>0} (C_k^{\mathrm{m}} - C_k^{\mathrm{vp}} - {}_kV_x)\left(q_{x+k-1}^{\mathrm{II}} - q_{x+k-1}^{\mathrm{I}}\right)\,{}_{k-1}p_x^{\mathrm{II}}\,(1+j)^{-k}\quad . \tag{192}$$

Osservazione 5.4.1. Il valore intrinsco misura, nel senso del valore alla data di valutazione, gli utili (o i disutili, se negativi) che sono incorporati nella polizza e che si libereranno anno per anno. L'assicuratore non può quindi incamerare il valore intrinseco, se positivo, alla data di valutazione, prelevandolo per esempio dalla riserva, ma deve aspettare che questo si liberi negli anni.[17] □

Osservazione 5.4.2. Il valore intrinseco che si ottiene dipende dalla scelta

1. della base tecnica demografica del II ordine,
2. dell'aspettativa dei rendimenti degli attivi,
3. dello spread che si applica al tasso privo di rischio per ottenere il tasso RAD.

La sensibilità del risultato a ciascuna delle tre ipotesi dipende dalla tipologia di polizza. La base tecnica demografica del II ordine può essere stimata con una certa precisione sui dati statistici della popolazione, con tecniche di demografia attuariale che sono ormai consolidate. La formulazione dell'aspettativa dei rendimenti degli attivi è un problema molto più complesso. Lo spread da applicare al tasso privo di rischio può essere calcolato con logica CAPM, ma solo dopo avere valutato con precisione la rischiosità degli utili; nella pratica operativa si usa spesso lo spread implicato dal beta del titolo azionario della compagnia (o della capogruppo, se la compagnia non è quotata). □

Osservazione 5.4.3. Se si calcola il valore intrisenco di tutte le polizze in essere di una compagnia, si ottiene il valore intrinseco del portafoglio polizze. Il valore della compagnia, spesso chiamato *embedded value* è dato da

valore della compagnia =	+	valore intrinseco del portafoglio polizze
	+	valore dei caricamenti
	−	valore delle spese
	+	capitale proprio rettificato
	−	costo del capitale immobilizzato per garantire solvibilità

[17] Ha comunque la possibilità di stipulare con un riassicuratore un trattato di *riassicurazione commerciale*, che gli permette di monetizzare in tutto o in parte il valore intrinseco della polizza.

+ franchise value

− effetti fiscali (tasse)

Il valore dei caricamenti e il valore delle spese devono essere calcolati con la stessa logica RAD e in riferimento all'intera durata residua del portafoglio polizze; il secondo è critico, perché la quantificazione delle spese future attese non è un problema semplice da risolvere. Anche la stima franchise value è complesse e spesso, nella pratica, viene forfettizato prendendo un multiplo del contributo al valore intrinseco della produzione dell'ultimo anno. □

Osservazione 5.4.4. Oramai il metro del valore intrinseco RAD è divenuto uno standard di mercato. Le principali compagnie europee presentano il calcolo dell'embedded value alla fine di ogni anno, insieme ai risultati dell'esercizio. Gli analisti del segmento assicurativo europeo sono quindi abituati a ragionare con questo metro e, per ovviare agli elementi di criticità della valutazione esposti nell'osservazione 5.4.2, si aspettano (e pretendono) che vengano resi note le ipotesi di valutazione, nonché l'analisi di sensibilità del risultato alle varie ipotesi. □

Esempi di calcolo dell'utile atteso e del valore intrinseco RAD sono nella cartella Excel `lab5.xls`.

6 Le polizze rivalutabili

6.1 Introduzione

Le *polizze vita rivalutabili* sono state introdotte nel mercato italiano negli anni di alta inflazione e oggi tutti i contratti dei rami vita proposti dalla compagnie italiane, con l'eccezione delle polizze TCM, sono rivalutabili.

Le polizze rivalutabili prevedono la rivalutazione annuale delle prestazioni e, a volte, anche dei premi in base al rendimento di un fondo gestito dall'assicuratore "separatamente dal resto delle sue attività" e dove sono investite le riserve delle polizze. Per questo motivo il fondo è chiamato *gestione separata*

Le gestioni separate delle compagnie italiane sono composte da attivi prevalentemente obbligazionari con "poco" rischio di credito (vincolo normativo). Gli attivi vengono contabilizzati al *costo storico* (e non al *valore di mercato*) e il *rendimento di gestione* è calcolato in senso contabile: è il rapporto tra i *redditi* incassati nel periodo di riferimento (cedole, plus/minusvalenze realizzate, ...) e la consistenza media nello stesso periodo.

Il meccanismo di rivalutazione è specifico della tipologia di polizza. È concettualmente analogo ad una *indicizzazione* ma con *minimo garantito*, come vedremo meglio nell'analisi di dettaglio. È basato sull'idea di retrocedere algli assicurati una parte dell'eventuale utile finanziario che, come abbiamo visto, sussiste nell'eventualità che il rendimento di gestione risulti maggiore del tasso tecnico.

Anche prima dell'avvento delle polizze rivalutabili erano previste, soprattutto nelle compagnie di assicurazione di tipo mutualistico, forme di *partecipazione agli utili* da parte degli assicurati, spesso con modalità fissate in modo discrezionale dall'assicuratore. Nelle polizze rivalutabili, invece, la partecipazione agli utili finanziari è *contrattualizzata* in modo preciso e impegnativo nella *regola contrattuale di rivalutazione.*

6.2 La formalizzazione della regola di rivalutazione

In questo paragrafo formalizzeremo la regola di rivalutazione come è applicata nella pratica assciruratiya italiana.

Si consideri fissata una polizza generica, con tasso tecnico i ed età alla stipula dell'assicurato x, le cui riserve siano investite in una gestione separata. Si indicherà con I_t il *rendimento di gestione* nell'anno $[t-1, t]$.

6.2.1 Utile retrocesso e utile trattenuto

Alla ricorrenza anniversaria t, la riserva matematica della polizza, usando l'equazione di Fouret, può essere scritta nella forma

$$ {}_tV_x = \frac{1}{p_{x+t-1}} \left[{}_{t-1}V_x^+ - C_t^{\mathrm{m}}\, q_{x+t-1}\, v - C_t^{\mathrm{vp}}\, p_{x+t-1}\, v \right] (1+i) \ , \tag{193} $$

che la esprime ricorsivamente come montante al tasso tecnico della riserva di bilancio di inizio anno, diminuita del valore delle prestazioni di fine anno (caso morte e caso vita posticipata), appena pagate. Il fattore $i+1$ esprime la capitalizzazione della riserva per l'anno $[t-1, t]$ secondo la base tecnica finanziaria del I ordine. Tuttavia, nella realtà, gli attivi a copertura sono capitalizzati al rendimento di gestione I_t. Dunque, a fine anno, dopo avere pagato le prestazioni, la disponibilità finanziaria – il valore degli attivi – sarà

$$ D_t = \frac{1}{p_{x+t-1}} \left[{}_{t-1}V_x^+ - C_t^{\mathrm{m}}\, q_{x+t-1}\, v - C_t^{\mathrm{vp}}\, p_{x+t-1}\, v \right] (1+I_t) \ . \tag{194} $$

Confrontando la (193) con la (194) si ottiene che

$$\frac{{}_tV_x}{1+i} = \frac{D_t}{1+I_t}$$

e quindi che

$$D_t = {}_tV_x \frac{1+I_t}{1+i} = {}_tV_x \left(1 + \frac{I_t - i}{1+i}\right) \quad . \tag{195}$$

La differenza

$$\Delta_t = D_t - {}_tV_x = {}_tV_x \frac{I_t - i}{1+i} \tag{196}$$

è il surplus (in senso algebrico) di valore degli attivi rispetto alla riserva che l'assicuratore deve coprire. Il segno di Δ_t è quello della differenza $I_t - i$: il surplus è positivo se il rendimento degli attivi ha "battuto" il tasso tecnico, negativo se hanno reso meno del tasso tecnico. Si tratta pertanto di un utile (in senso algebrico) di tipo finanziario.

Osservazione 6.2.1. Il surplus (196) è una misura dell'utile finanziario leggermente diversa dalla componente finanziaria della scomposizione di Homans dall'utile vista nel paragrafo 5.3. La differenza è pricipalmente dovuta al fatto che la (196) esprime l'utile certo in t di una polizza in essere al tempo t; l'utile finanziario in t nel senso della scomposizione di Homans è ottenuto invece per un contratto in essere al tempo $t-1$ ed è aleatorio (come nella (174)) o atteso (come nella (177)). □

Si assuma che l'assicuratore voglia retrocedere all'assicurato una parte del surplus (196), in modo da far partecipare l'assicurato all'utile. Poiché il surplus deriva dal rendimento di gestione I_t, l'idea è di fissare contrattualmente un'*aliquota di retrocessione* (*aliquota di partecipazione*) $\beta \in (0,1]$ e di ripartire il rendimento degli attivi in base a quest'aliquota:

$$I_t = \beta I_t + (1-\beta) I_t \quad .$$

La componente βI_t è il *rendimento retrocesso* all'assicurato, $(1-\beta)I_t$ è il *rendimento trattenuto*. La scomposizione del rendimento induce una scomposizione del surplus: l'*utile retrocesso* Δ_t^{retr} si ottiene calcolando la (196) per il solo rendimento retrocesso, ciò che rimane del surplus è l'*utile trattenuto* dall'assicuratore Δ_t^{tratt}. In formule

$$\Delta_t^{\text{retr}} = {}_tV_x \frac{\beta I_t - i}{1+i} \quad , \tag{197}$$

$$\Delta_t^{\text{tratt}} = \Delta_t - \Delta_t^{\text{retr}} = {}_tV_x \frac{(1-\beta) I_t}{1+i} \quad . \tag{198}$$

Quest'idea non può essere (e nella pratica non viene) applicata in questo modo. Infatti, se $I_t < i/\beta$, l'utile da retrocedere sarebbe negativo, con problemi di tipo giuridico e anche commerciale. Per questo motivo viene aggiunta la condizione che l'assicurato partecipi sì all'utile, ma non al disutile, che viene attuata aggiungendo il vincolo che il risultato della (197) sia non negativo. Le formule diventano quindi

$$\Delta_t^{\text{retr}} = \max\left({}_tV_x \frac{\beta I_t - i}{1+i}\,,\, 0\right) \quad ,$$

$$\Delta_t^{\text{tratt}} = \Delta_t - \Delta_t^{\text{retr}} \quad .$$

Introducendo il *tasso di rivalutazione*

$$\rho_t = \max\left(\frac{\beta I_t - i}{1+i}\,,\, 0\right) = \frac{\max(\beta I_t\,,\, i) - i}{1+i} = \frac{1 + \max(\beta I_t\,,\, i)}{1+i} - 1 \tag{199}$$

e ricordando che la riserva ${}_tV_x$ è non negativa, si ottiene che

$$\Delta_t^{\text{retr}} = {}_tV_x\,\rho_t \ \ , \tag{200}$$

cioè che l'utile da retrocedere è l'interesse al tasso ρ_t della riserva matematica al tempo t.

L'ultima uguaglianza della (199) mostra che $1+\rho_t = [1+\max(\beta I_t\,,\,i)]/(1+i)$. Il fattore $1/(1+i)$ è presente perché il tasso ρ_t, in base al quale viene calcolato l'utile da retrocedere per l'anno $[t-1, t]$, viene applicato alla riserva di fine anno e non a quella di inizio anno. A meno di quel fattore, il tasso di rivalutazione è il maggiore fra il rendimento attribuito e il tasso tecnico.

L'utile trattenuto

$$\Delta_t^{\text{tratt}} = \Delta_t - \Delta_t^{\text{retr}} = {}_tV_x\left(\frac{I_t - i}{1+i} - \rho_t\right)$$

si può invece esprimere nella forma

$$\Delta_t^{\text{tratt}} = {}_tV_x\frac{I_t - \max(\beta I_t\,,\,i)}{1+i} \tag{201}$$

oppure, ricordando le proprietà degli operatori max e min[18], nella forma

$$\Delta_t^{\text{tratt}} = {}_tV_x\frac{\min[(1-\beta)I_t\,,\,I_t - i]}{1+i}. \tag{202}$$

Quindi, sempre a meno del fattore $1/(1+i)$, l'assicuratore si tiene (in senso algebrico) il minore fra il rendimento trattenuto e lo spread fra il rendimento I_t e il tasso tecnico.

Nella figura 2 sono mostrate alcune delle grandezze coinvolte nella costruzione dell'utile retrocesso e trattenuto, in funzione del rendimento I_t. In riferimento a quella figura, è immediato osservare che:

- Se $I_t < i$ l'assicuratore non è riuscito a rivalutare gli attivi in maniera sufficiente e il surplus è negativo:

  $$\Delta_t = {}_tV_x\,\frac{I_t - i}{1+i} < 0 \ \ .$$

  Poiché $\beta > 0$, si ha che $\beta I_t - i < I_t - i < 0$ e quindi il tasso di rivalutazione è nullo

  $$\rho_t = \max\left(\frac{\beta I_t - i}{1+i}\,,\,0\right) = 0 \ \ ,$$

  l'utile retrocesso è nullo

  $$\Delta_t^{\text{retr}} = {}_tV_x\,\rho_t = 0$$

  e l'utile trattenuto è negativo, coincide con il surplus ed è, in valore assoluto, l'entità dell'integrazione che l'assicuratore deve operare per coprire la riserva in t:

  $$\Delta_t^{\text{tratt}} = \Delta_t = {}_tV_x\,\frac{I_t - i}{1+i} < 0 \ \ .$$

[18] Gli operatori max e min godono delle proprietà:

$\max(-a\,,\,-b) = -\min(a\,,\,b)$,	per ogni coppia di numeri reali a e b;
$\min(-a\,,\,-b) = -\max(a\,,\,b)$,	per ogni coppia di numeri reali a e b;
$\max(a\,,\,b) + c = \max(a+c\,,\,b+c)$,	per ogni terna di numeri reali a, b e c;
$\min(a\,,\,b) + c = \min(a+c\,,\,b+c)$,	per ogni terna di numeri reali a, b e c;
$c\max(a\,,\,b) = \max(c\,a\,,\,c\,b)$,	per ogni terna di numeri reali a, b e c, con $c \geq 0$;
$c\min(a\,,\,b) = \min(c\,a\,,\,c\,b)$,	per ogni terna di numeri reali a, b e c, con $c \geq 0$.

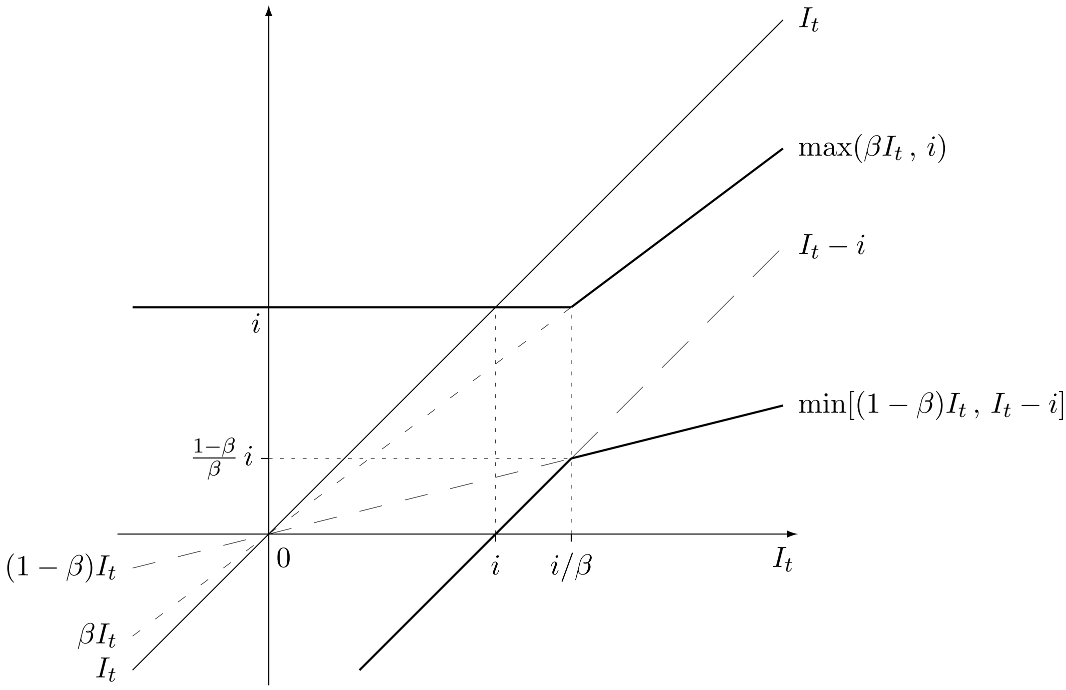

Figura 2: Grandezze coinvolte nella costruzione dell'utile retrocesso e trattenuto

- Se $i \leq I_t < I/\beta$ la situazione è migliore ma non rosea. Il surplus è infatti non negativo e gli attivi sono quindi sufficienti a coprire la riserva. Il rendimento di gestione ha battuto il tasso tecnico, ma "di poco": essendo $I_t < i/\beta$ si ha che $\beta I_t < i$. Quindi il tasso di rivalutazione è nullo, non vi è utile retrocesso e, poiché

$$0 \leq \frac{\min[(1-\beta)I_t\,,\,I_t - i]}{1+i} = \frac{I_t - i}{1+i} < \frac{(1-\beta)I_t}{1+i}$$

l'utile trattenuto è non negativo ma minore di quello che si otterrebbe potendo utilizzare il rendimento trattenuto $(1-\beta)I_t$.

- Se infine $I_t \geq i/\beta$, il surplus è positivo, il tasso di rivalutazione è

$$\rho_t = \max\left(\frac{\beta I_t - i}{1+i}\,,\,0\right) = \frac{\beta I_t - i}{1+i} \geq 0$$

e il tasso che determina l'utile trattenuto è

$$\frac{\min[(1-\beta)I_t\,,\,I_t - i]}{1+i} = \frac{(1-\beta)I_t}{1+i} \geq \frac{1-\beta}{\beta}\frac{i}{1+i} \geq 0 \ .$$

Esempio 6.2.1. Si consideri una polizza con $i = 4\%$ e $\beta = 80\%$. Il tasso tecnico è al livello tipicamente praticato fino alla fine degli anni '90, mentre l'aliquota di retrocessione è tuttora standard per polizze rivalutabili a premio annuo. I livelli critici del rendimento di gestione sono quindi $I_t = i = 4\%$ e $I_t = i/\beta = 5\%$. L'analisi dei tre casi precedenti fornisce:

- Se l'assicuratore non riesce a rivalutare gli attivi di almeno il 4%, la situazione è pessima: non solo non può retrocedere utile, ma deve coprire con capitale proprio il disutile che si crea per l'insufficienza di rendimento degli attivi.

- Se $4\% \leq I_t < 5\%$ la situazione è migliore ma non ottimale. Non si è creato disutile, ma l'utile generato è scarso: non è sufficiente a retrocederne una parte all'assicurato e l'utile trattenuto è meno del preventivato 20% del rendimento di gestione.

- Il caso $I_t \geq 5\%$ è quello ideale: l'assicuratore può trattenere esattamente il 20% del rendimento e, se $I_t > 5\%$, rimane anche qualcosa da retrocedere all'assicurato. □

Esempio 6.2.2. Le condizioni contrattuali tipiche delle polizze rivalutabili a premio annuo commercializzate alla fine del 2005 prevedono $i = 1.5\%$ e $\beta = 85\%$. I livelli critici del rendimento di gestione sono quindi $I_t = i = 1.5\%$ e $I_t = i/\beta \approx 1.76\%$. □

Osservazione 6.2.2. Il caso limite $\beta = 0$ corrisponde al caso di polizza non rivalutabile: essendo $\beta I_t - i = -i < 0$, il tasso di rivalutazione è $\rho_t = 0$ e l'intero surplus è trattenuto dall'assicuratore.
All'altro estremo si ha il caso $\beta = 1$, dove vi è retrocessione integrale dell'utile, se positivo. In questo caso, infatti, se $I_t \geq i/\beta = i$ risulta $\Delta_t^{\text{retr}} = \Delta_t \geq 0$ e $\Delta_t^{\text{tratt}} = 0$, mentre se $I_t < i$ risulta $\Delta_t^{\text{retr}} = 0$ e $\Delta_t = \Delta_t^{\text{tratt}} < 0$. □

Una volta ripartito il surplus, vi possono essere varie forme di attuazione della retrocessione. Nei paragrafi che seguono verranno analizzate le più diffuse: retrocessione sotto forma di cedola, come incremento (rivalutazione) delle prestazioni, come rivalutazione sia delle prestazioni che dei premi.

Nella cartella Excel `lab6.xls` sono proposti esempi numerici di calcolo del surplus e della sua scomposizione in utile retrocesso e trattenuto.

6.2.2 Retrocessione sotto forma di cedole

Il contratto può stabilire che l'utile retrocesso venga liquidato all'assicurato al tempo t. Questo caso è presente nella pratica assicurativa italiana solo in alcune polizze commercializzate nei canali bancassicurativi, con lo scopo di fare competere il prodotto con prodotti finanziari che prevedono cedole.

Esempio 6.2.3. Si consideri una polizza mista a premio unico, con durata n anni, capitale assicurato C, tasso tecnico $i = 0$, retrocessione dell'utile sotto forma di cedole annuali con aliquota di retrocessione $\beta = 90\%$. In questa tipologia contrattuale, diffussa nella pratica bancassicurativa, la riserva matematica coincide in ogni istante t con il capitale assicurato C (cfr. l'osservazione 3.2.3):

$$ {}_tV_x = C\left({}_{n-t}\mathrm{E}_{x+t} + {}_{n-t}\mathrm{A}_{x+t}\right) = C \ . $$

Fissato il rendimento di gestione I_t, il tasso di rivalutazione è

$$ \rho_t = \max(\beta I_t\,,\,0) $$

e l'utile retrocesso, la cedola annuale, è quindi

$$ \Delta_t^{\text{retr}} = {}_tV_x\,\rho_t = C\,\max(\beta I_t\,,\,0) \ . $$

La polizza è facilmente confrontabile con un'obbligazione di nominale C, con cedole annuali indicizzate al 90% del rendimento di gestione. □

6.2.3 Retrocessione sotto forma di rivalutazione delle prestazioni

Nei casi più frequenti l'utile retrocesso non viene liquidato all'assicurato al tempo t, ma viene trasformato in un incremento (rivalutazione) delle prestazioni della polizza. Il procedimento è quello di usare l'utile da retrocedere per "acquistare" per conto dell'assicurato una polizza (aggiuntiva) dello stesso tipo e con la stessa scadenza di quella originale (polizza base) ma a premio unico. In questo modo alle prestazioni della polizza base vengono sommate quelle previste dalla polizza aggiuntiva e si prosegue "come se" la polizza fosse stata originariamente stipulata per le prestazioni risultanti. Questa procedura viene attuata ad ogni ricorrenza anniversaria e le prestazioni contrattuali vengono quindi incrementate di anno in anno.

La polizza aggiuntiva che l'assicuratore "vende" ogni anno ha un costo uguale all'utile da retrocedere per quell'anno e può essere a *premio unico puro* o a *premio unico di inventario*. Nel primo caso l'assicuratore non applica caricamenti alla polizza aggiuntiva: il relativo premio unico puro coincide con il premio unico di tariffa ed entrambi sono uguali all'utile retrocesso. Nel secondo caso, invece, l'assicuratore applica un caricamento e quindi il premio unico puro è minore del premio unico di tariffa, che coincide con l'utile retrocesso. La terminologia "premio unico di inventario", che significa premio unico gravato della sola componente di caricamento per spese di gestione, allude alla scomposizione tradizionale del caricamento: poiché non vi sono spese di acquisizione (il cliente è già acquisito) né di incasso (si tratta di un incasso "virtuale") l'unico caricamento da applicare è quello per spese di gestione.[19]

Poiché il premio unico puro della polizza aggiuntiva coincide con la riserva prestazioni della stessa, nella rivalutazione a premio unico puro, per effetto della rivalutazione, la riserva della polizza cresce esattamente dell'utile retrocesso: indicando con ${}_tV_x$ la riserva matematica in t, calcolata sulla base delle prestazioni non ancora rivalutate, e con ${}_tV_x^{\mathrm{riv}}$ la riserva calcolata con le prestazioni rivalutate, risulta

$$ {}_tV_x^{\mathrm{riv}} = {}_tV_x + \Delta_t^{\mathrm{retr}} \ . \tag{203} $$

Nella rivalutazione a premio unico di inventario, invece, nel membro sinistro della formula precedente occorre sottrarre il caricamento G_t applicato:

$$ {}_tV_x^{\mathrm{riv}} = {}_tV_x + \Delta_t^{\mathrm{retr}} - G_t \ . \tag{204} $$

La descrizione appena esposta della regola di rivalutazione delle prestazioni appare "macchinosa" e complicata da illustrare al cliente; può tuttavia essere tradotta in regole di rivalutazione delle prestazioni. Anzi, normalmente, nei contratti non si parla di "utile retrocesso", né di "rivalutazione a premio unico puro", ma si descrive la regola annuale di rivalutazione delle prestazioni in modo ricorrente, a partire dal livello raggiunto l'anno prima e dal tasso di rivalutazione per l'anno in questione.

Esempio 6.2.4. Un esempio tipico di formalizzazione contrattuale della regola di rivalutazione per una polizza di capitale differito a premio unico con $\beta = 85\%$ e $i = 1.5\%$ è:

> "Il capitale assicurato viene rivalutato ad ogni ricorrenza anniversaria. La misura annua della rivalutazione è l'85% del rendimento certificato della gestione separata, diminuito di 1.5%, diviso per 1.015. La misura annua di rivalutazione non può risultare negativa."

Come si vedrà nell'esempio 6.2.5, è la trascrizione a parole della regola ricorrente di rivalutazione del capitale assicurato nel caso di rivalutazione a premio unico puro. □

La traduzione della regola di rivalutazione, che sia a premio unico puro o di inventario, in regola di rivalutazione delle prestazioni dipende dalla tipologia del contratto. Si tratta di imporre la condizione (203) o (204) e ricavare le prestazioni rivalutate a partire da quelle non rivalutate.

Esempio 6.2.5. Si consideri una polizza di capitale differito a premio unico, stipulata da un assicurato di età x per la durata di n anni. Si assuma che sia contrattualmente stabilita la

[19] Nella modalità di rivalutazione a premio unico puro il contratto dovrebbe progettato in modo che le spese di gestione delle polizze aggiuntive siano coperte dai caricamenti della polizza base.

rivalutazione annuale del capitale assicurato a premio unico puro. Sia C_{t-1} il capitale assicurato come rivalutato fino alla ricorrenza anniversaria $t-1$. Se si indica con $C_k^{\rm agg}$ l'incremento di prestazione aggiunto alla ricorrenza anniversaria k-esima, risulta naturalmente che

$$C_t = C_0 + \sum_{k=1}^{t-1} C_k^{\rm agg} \ ,$$

essendo C_0 il capitale inizialmente assicurato. Al tempo t, subito prima della rivalutazione, la riserva matematica della polizza è

$${}_xV_t = C_{t-1}\,{}_{n-t}\mathrm{E}_{x+t} \ .$$

Sia ρ_t il tasso di rivaluazione per l'anno $[t-1,t]$; l'utile da retrocedere alla polizza è

$$\Delta_t^{\rm retr} = {}_xV_t\,\rho_t = C_{t-1}\,{}_{n-t}\mathrm{E}_{x+t}\,\rho_t \ .$$

Il tasso di premio unico puro della polizza aggiuntiva ${}_{n-t}\mathrm{u}_{x+t}$, cioè il premio unico puro per unità di capitale assicurato della polizza di capitale differito per $n-t$ anni è

$${}_{n-t}\mathrm{u}_{x+t} = {}_{n-t}\mathrm{E}_{x+t} \ .$$

Si osservi che il tasso di premio unico puro coincide con il tasso di riserva prestazioni: in entrambi i casi è il valore attuale attuariale, secondo la base tecnica del I ordine, delle prestazioni residue della polizza. Il capitale assicurato della polizza aggiuntiva, cioè il capitale aggiuntivo $C_t^{\rm agg}$, si determina imponendo la condizione che il premio della polizza aggiuntiva sia uguale all'utile da retrocedere:

$$C_t^{\rm agg}\,{}_{n-t}\mathrm{u}_{x+t} = \Delta_t^{\rm retr} \ ,$$

da cui si ottiene che

$$C_t^{\rm agg} = \frac{\Delta_t^{\rm retr}}{{}_{n-t}\mathrm{u}_{x+t}} = \frac{{}_xV_t}{{}_{n-t}\mathrm{u}_{x+t}}\rho_t = \frac{C_{t-1}\,{}_{n-t}\mathrm{u}_{x+t}}{{}_{n-t}\mathrm{u}_{x+t}}\,\rho_t = C_{t-1}\,\rho_t \ .$$

La riserva della polizza aggiuntiva è uguale al premio unico puro e quindi

$${}_tV_x^{\rm agg} = \Delta_t^{\rm retr} \ .$$

L'effetto della rivalutazione è quello di incrementare il capitale assicurato secondo la regola

$$C_t = C_{t-1} + C_t^{\rm agg} = C_{t-1}(1+\rho_t) \ . \tag{205}$$

La riserva della polizza dopo la rivalutazione è

$${}_tV_x^{\rm riv} = {}_tV_x + {}_tV_x^{\rm agg} = {}_tV_x + \Delta_t^{\rm retr}$$

e la rivalutazione trasforma quindi l'utile retrocesso in incremento di riserva della polizza. □

Osservazione 6.2.3. La regola di rivalutatazione del capitale assicurato vista nell'esempio 6.2.5 è di tipo ricorrente

$$C_t = C_{t-1}(1+\rho_t)$$

e si chiama regola di *rivalutazione piena*. Indicando con C_0 il livello iniziale del capitale assicurato, stabilito contrattualmente alla stipula, la regola di rivalutazione piena ammette la soluzione in forma chiusa

$$C_t = C_0 \prod_{k=1}^{t}(1+\rho_t) \ . \quad \square$$

Esempio 6.2.6. Si consideri il caso dell'esempio 6.2.5, ma con regola contrattuale di rivalutazione a premio unico di inventario. Sia ${}_{n-t}g_{x+t}$ il tasso di caricamento per spese di gestione (per unità di premio di tariffa, come usuale per i tassi di caricamento) del premio unico della polizza aggiuntiva che realizza la rivalutazione alla ricorrenza anniversaria t. Si noti che, in linea di principio, il tasso di caricamento può dipendere da t per tramite dell'età raggiunta $x+t$ e della durata residua $n-t$, che è la durata della polizza aggiuntiva. Il tasso di premio unico di inventario (per unità di capitale aggiuntivo) è allora

$$ {}_{n-t}\mathrm{t}_{x+t} = \frac{{}_{n-t}\mathrm{u}_{x+t}}{1 - {}_{n-t}g_{x+t}} = \frac{{}_{n-t}\mathrm{E}_{x+t}}{1 - {}_{n-t}g_{x+t}} \quad . $$

Ripetendo il ragionamento dell'esempio 6.2.5, partendo dalla condizione che il premio di tariffa della polizza aggiuntiva sia uguale all'utile trattenuto:

$$ C_t^{\mathrm{agg}}\, {}_{n-t}\mathrm{t}_{x+t} = \Delta_t^{\mathrm{retr}} \quad , $$

si ottiene che

$$ \begin{aligned} C_t^{\mathrm{agg}} &= \frac{\Delta_t^{\mathrm{retr}}}{{}_{n-t}\mathrm{t}_{x+t}} = C_{t-1}\,(1 - {}_{n-t}g_{x+t})\,\rho_t \quad , \\ {}_tV_x^{\mathrm{agg}} &= C_t^{\mathrm{agg}}\, {}_{n-t}\mathrm{u}_{x+t} = \Delta_t^{\mathrm{retr}} \frac{{}_{n-t}\mathrm{u}_{x+t}}{{}_{n-t}\mathrm{t}_{x+t}} = \Delta_t^{\mathrm{retr}}\,(1 - {}_{n-t}g_{x+t}) \quad , \\ C_t &= C_{t-1} + C_t^{\mathrm{agg}} = C_{t-1}\,[1 + (1 - {}_{n-t}g_{x+t})\,\rho_t] \quad , \\ {}_tV_x^{\mathrm{riv}} &= {}_tV_x + {}_tV_x^{\mathrm{agg}} = {}_tV_x + \Delta_t^{\mathrm{retr}} - \Delta_t^{\mathrm{retr}}\, {}_{n-t}g_{x+t} \quad . \end{aligned} $$

Quindi, rispetto al caso di rivalutazione a premio puro, essendo ${}_{n-t}g_{x+t} > 0$ e quindi

$$ (1 - {}_{n-t}g_{x+t})\,\rho_t \le \rho_t \quad , $$

e la rivalutazione del capitale assicurato è meno che piena, perché "frenata" dal tasso di caricamento. Equivalentemente, non tutto l'utile da retrocedere viene trasformato in incremento di riserva della polizza perché viene applicato il caricamento $G_t = \Delta_t^{\mathrm{retr}}\, {}_{n-t}g_{x+t}$. □

Esempio 6.2.7. In una polizza mista a premio unico la situazione è formalmente analoga a quella della capitale differito, sia nel caso di rivalutazione a premio unico puro che in quello di rivalutazione a premio unico di inventario. L'unica cosa che cambia è l'espressione del tasso di premio unico puro della polizza aggiuntiva, che coincide con il tasso di riserva prestazioni e che nel caso della mista è

$$ {}_{n-t}\mathrm{u}_{x+t} = {}_{n-t}\mathrm{E}_{x+t} + {}_{n-t}\mathrm{A}_{x+t} \quad . $$

Ripetendo il calcolo, infatti, si ottengono le stesse espressioni già ottenute per la capitale differito perché, come in quel caso, il tasso di premio unico puro si semplifica. □

Esempio 6.2.8. Si consideri una polizza di capitale differito a premio annuo costante, con rivalutazione del capitale assicurato a premio unico puro. Sia n la durata contrattuale, C_0 il capitale assicurato iniziale, definito alla stipula del contratto, C_{t-1} il capitale assicurato come rivalutato fino alla ricorrenza anniversaria $t-1$, P il premio annuo puro e x l'età dell'assicurato alla stipula del contratto. Naturalmente si ha

$$ P = C_0 \frac{{}_n\mathrm{E}_x}{{}_n\ddot{\mathrm{a}}_x} = C_0 \frac{{}_n\mathrm{u}_x}{{}_n\ddot{\mathrm{a}}_x} \quad , \tag{206} $$

dove ${}_n\mathrm{u}_x$ è il tasso di premio unico puro, che coincide con il tasso di riserva prestazioni ed è lo stesso della versione a premio unico del contratto, trattata nell'esempio 6.2.5. Al tempo t, subito prima della rivalutazione, la riserva matematica della polizza è

$$ {}_tV_x = C_{t-1}\, {}_{n-t}\mathrm{E}_{x+t} - P\, {}_{n-t}\ddot{\mathrm{a}}_{x+t} = C_{t-1}\, {}_{n-t}\mathrm{u}_{x+t} - P\, {}_{n-t}\ddot{\mathrm{a}}_{x+t} \quad . $$

Fissato il tasso di rivalutazione ρ_t, e quindi l'utile da retrocedere $\Delta_t^{\text{retr}} = {}_tV_x\,\rho_t$, il capitale aggiuntivo è dato da

$$C_t^{\text{agg}} = \frac{\Delta_t^{\text{retr}}}{{}_{n-t}\mathrm{u}_{x+t}} = \frac{C_{t-1}\,{}_{n-t}\mathrm{u}_{x+t} - P\,{}_{n-t}\ddot{\mathrm{a}}_{x+t}}{{}_{n-t}\mathrm{u}_{x+t}}\rho_t = C_{t-1}\,\rho_t - P\frac{{}_{n-t}\ddot{\mathrm{a}}_{x+t}}{{}_{n-t}\mathrm{u}_{x+t}}\rho_t \ .$$

Rispetto alla versione a premio unico si ottiene quindi un termine correttivo a sottrarre. Ricordando la (206), il termine correttivo può essere scritto nella forma

$$P\,\frac{{}_{n-t}\ddot{\mathrm{a}}_{x+t}}{{}_{n-t}\mathrm{u}_{x+t}}\,\rho_t = C_0\,\frac{{}_n\mathrm{u}_x\,{}_{n-t}\ddot{\mathrm{a}}_{x+t}}{{}_{n-t}\mathrm{u}_{x+t}\,{}_n\ddot{\mathrm{a}}_x}\,\rho_t$$

e quindi

$$C_t^{\text{agg}} = C_{t-1}\,\rho_t - C_0\,\frac{{}_n\mathrm{u}_x\,{}_{n-t}\ddot{\mathrm{a}}_{x+t}}{{}_{n-t}\mathrm{u}_{x+t}\,{}_n\ddot{\mathrm{a}}_x}\,\rho_t \ .$$

Essendo la regola di rivalutazione a premio unico puro, la riserva matematica della polizza aggiuntiva coincide con l'utile retrocesso e quindi la riserva matematica complessiva cresce esattamente dell'utile retrocesso. La regola di rivalutazione del capitale assicurato è

$$C_t = C_{t-1} + C_t^{\text{agg}} = C_{t-1}(1+\rho_t) - C_0\,\frac{{}_n\mathrm{u}_x\,{}_{n-t}\ddot{\mathrm{a}}_{x+t}}{{}_{n-t}\mathrm{u}_{x+t}\,{}_n\ddot{\mathrm{a}}_x}\,\rho_t \ . \quad \square$$

Osservazione 6.2.4. Si può dimostrare che, nei casi di rilevanza pratica, il coefficiente "attuariale" del termine correttivo che compare nella regola di rivalutazione a premio unico puro della polizza di capitale differito a premio annuo dell'esempio 6.2.8 può essere approssimato efficacemente con

$$\frac{{}_n\mathrm{u}_x\,{}_{n-t}\ddot{\mathrm{a}}_{x+t}}{{}_{n-t}\mathrm{u}_{x+t}\,{}_n\ddot{\mathrm{a}}_x} = \frac{{}_n\mathrm{E}_x\,{}_{n-t}\ddot{\mathrm{a}}_{x+t}}{{}_{n-t}\mathrm{E}_{x+t}\,{}_n\ddot{\mathrm{a}}_x} \approx \frac{n-t}{n} \ . \tag{207}$$

Accettando questa approssimazione la regola di rivalutazione del capitale assicurato diventa

$$C_t = C_{t-1}(1+\rho_t) - C_0\,\frac{n-t}{n}\rho_t \ . \tag{208}$$

Se ne può ottenere un'interpretazione significativa riscrivendola nella forma

$$C_t^{\text{agg}} = C_t - C_{t-1} = (C_{t-1} - C_0)\rho_t + \frac{t}{n}C_0\,\rho_t \ ,$$

che mostra come il capitale aggiuntivo derivante dalla rivalutazione al tempo t sia la somma di due componenti:

- l'interesse al tasso ρ_t sulla rivalutazione intervenuta dalla data di stipula fino alla ricorrenza anniversaria precedente, cioè sui capitali aggiuntivi corrisposti in anni precedenti;
- l'interesse al tasso ρ_t sulla frazione del capitale inizialmente assicurato che corrisponde ai t premi versati fino alla data corrente, rapportati agli n contrattualmente previsti.

L'interpretazione è la seguente: la prestazione è stata pagata per t/n e quindi il capitale aggiuntivo (che è un interesse) viene calcolato sui t/n del capitale inizialmente assicurato, cui si aggiunge l'"interesse composto", cioè la rivalutazione delle rivalutazioni concesse in anni precedenti, che spetta per intero.

Si noti che la (208), che va sotto il nome di *regola degli ennesimi* ed è nata come un'approssimazione della regola metodologicamente corretta, è ormai accettata anche a livello contrattuale. È infatti più "trasparente" e semplice da spiegare alla clientela e meno complessa da gestire per l'assicuratore. $\square$

Osservazione 6.2.5. La regola di rivalutazione della prestazione per l'ultimo anno della polizza dell'esempio 6.2.8 è

$$C_n = C_{n-1}(1+\rho_n) - C_0 \, \frac{{}_n\mathrm{u}_x \; {}_0\ddot{\mathrm{a}}_{x+n}}{{}_0\mathrm{u}_{x+n} \; {}_n\ddot{\mathrm{a}}_x} \, \rho_n \quad .$$

Poiché ${}_0\ddot{\mathrm{a}}_{x+n} = 0$, il termine correttivo si annulla e si ha

$$C_n = C_{n-1}(1+\rho_n) \quad ,$$

cioè nell'ultimo anno di polizza la rivalutazione è piena. Lo stesso accade anche per l'approssimazione agli ennesimi, essendo

$$C_n = C_{n-1}(1+\rho_n) - C_0 \, \frac{n-n}{n} \, \rho_n = C_{n-1}(1+\rho_n) \quad ,$$

corentemente con l'interpretazione del termine correttivo fatta nell'osservazione 6.2.4: al tempo n tutti i premi contrattualmente previsti sono stati pagati. □

Esempio 6.2.9. In riferimento all'esempio 6.2.8, se la prestazione prevista è di tipo misto anziché di capitale differito, il risultato che si ottiene è formalmente analogo. L'unica differenza è nell'espresione del tasso di premio unico puro (che è ovviamente la stessa della mista a premio unico). Anche in questo caso la regola di rivalutazione può essere efficacemente approssimata con la regola degli ennesimi. □

Esempio 6.2.10. In una polizza di capitale differito o mista a premio annuo costante, con rivalutazione delle prestazioni a premio unico di inventario, si può ripetere il procedimento dell'esempio 6.2.8, adattandolo alla presenza del tasso di caricamento non nullo ${}_{n-t}g_{x+t}$. L'espressione che si ottiene è

$$C_t = C_{t-1}\left[1 + (1 - {}_{n-t}g_{x+t})\,\rho_t\right] - C_0 \, \frac{{}_n\mathrm{u}_x \; {}_{n-t}\ddot{\mathrm{a}}_{x+t}}{{}_{n-t}\mathrm{u}_{x+t} \; {}_n\ddot{\mathrm{a}}_x} \, (1 - {}_{n-t}g_{x+t})\,\rho_t \quad ,$$

dove naturalmente il tasso di premio unico puro ${}_{n-t}\mathrm{u}_{x+t}$ è quello della polizza specifica (mista o capitale differito). Come nel caso delle polizze corrispondenti a premio unico, la rivalutazione è minore di quella del caso a premio unico puro, per la presenza del termine $(1 - {}_{n-t}g_{x+t}) < 1$. □

Esempio 6.2.11. Nel caso di una polizza di rendita vitalizia, immediata o differita, temporanea o meno, anticipata o posticipata, i risultati che si ottengono sono analoghi a quelli della polizza di capitale differito. L'analogia dipende dal fatto che nella polizza di capitale differito la riserva prestazioni e il premio unico puro sono proporzionali al capitale assicurato, mentre nella polizza di rendita la proporzionalità è rispetto alla rata della rendita assicurata. □

Nella cartella Excel `lab6.xls` sono proposti esempi numerici di trasformazione dell'utile retrocesso in rivalutazione delle prestazioni.

6.2.4 Retrocessione sotto forma di rivalutazione di premi e prestazioni

Come visto nell'analisi delle regole di rivalutazione delle polizze a premio annuo, la rivalutazione delle prestazioni è "frenata", rispetto alla rivalutazione piena, dal fatto che non tutti i premi sono stati pagati. Non è infatti possibile rivalutare le prestazioni in modo pieno perché si romperebbe l'equilibrio della polizza: per finanziare l'incremento di riserva sarebbe necessario un importo maggiore dell'utile da retrocedere. Una soluzione per ovviare a questo problema è di rivalutare anche il premio annuo che l'assicurato corrisponde; la rivalutazione riguarda naturalmente solo i premi ancora da versare. Illustriamo questo procedimento per il caso di una polizza mista a *premio annuo rivalutabile.*

Esempio 6.2.12. In una polizza mista a premio annuo rivalutabile, con capitale assicurato rivalutabile, durata n anni, età dell'assicurato alla stipula x, sia il capitale assicurato che il premio annuo rivalutano in modo pieno. Se i livelli iniziali del capitale assicurato e del premio annuo puro sono rispettivamente C_0 e P_0, la regola contrattuale è

$$C_t = C_{t-1}(1+\rho_t) \ ,$$
$$P_t = P_{t-1}(1+\rho_t) \ .$$

In forma chiusa si ottiene che

$$C_t = C_0 \prod_{k=1}^{t}(1+\rho_k) \ , \qquad\qquad P_t = P_0 \prod_{k=1}^{t}(1+\rho_k) \ .$$

La regola di rivalutazione è metodologicamente corretta. Infatti l'utile da retrocedere al tempo t è

$$\Delta_t^{\text{retr}} = {}_tV_x\,\rho_t = \left(C_{t-1}\,{}_{n-t}\text{u}_{x+t} - P_{t-1}\,{}_{n-t}\ddot{\text{a}}_{x+t}\right)\rho_t$$

e la riserva dopo la rivalutazione risulta

$$\begin{aligned} {}_xV_t^{\text{riv}} &= C_t\,{}_{n-t}\text{u}_{x+t} - P_t\,{}_{n-t}\ddot{\text{a}}_{x+t} \\ &= C_{t-1}(1+\rho_t)\,{}_{n-t}\text{u}_{x+t} - P_{t-1}(1+\rho_t)\,{}_{n-t}\ddot{\text{a}}_{x+t} \\ &= \left(C_{t-1}\,{}_{n-t}\text{u}_{x+t} - P_{t-1}\,{}_{n-t}\ddot{\text{a}}_{x+t}\right)(1+\rho_t) \\ &= {}_tV_x(1+\rho_t) \\ &= {}_tV_x + \Delta_t^{\text{retr}} \ , \end{aligned}$$

che mostra come la rivalutazione piena del capitale assicurato e del premio corrisponda all'attribuzione alla riserva della polizza dell'utile da retrocedere. □

Nella cartella Excel `lab6.xls` sono proposti esempi numerici di polizze con prestazioni e premi rivalutabili.

6.3 Le opzioni implicite nella rivalutazione

La condizione che l'assicurato partecipi all'utile ma non al disutile, che viene implementata aggiungendo nella (199) un *floor* a zero per il tasso di rivalutazione, conferisce alla regola di rivalutazione una componente opzionale. Usando le proprietà dell'operatore max, possiamo infatti scomporre il tasso di rivalutazione per l'anno t in due componenti:

$$\rho_t = \rho_t^{\text{base}} + \rho_t^{\text{put}} \ . \tag{209}$$

La prima, ρ_t^{base}, è il *tasso di rivalutazione base*; è il tasso di rivalutazione privato del floor:

$$\rho_t^{\text{base}} = \frac{\beta I_t - i}{1+i} \ . \tag{210}$$

La seconda, ρ_t^{put}, è la differenza

$$\rho_t^{\text{put}} = \rho_t - \rho_t^{\text{base}} = \max\left(\frac{\beta I_t - i}{1+i}\,,\,0\right) - \frac{\beta I_t - i}{1+i} = \max\left(\frac{i - \beta I_t}{1+i}\,,\,0\right) \ . \tag{211}$$

La scomposizione (209) è la *scomposizione put* del tasso di rivalutazione; lo esprime come somma della componente base con la *componente put*, che è un'opzione che protegge il minimo garantito nullo. La scomposizione put mostra come la rivalutazione consista nel retrocedere ρ_t^{base} più un'opzione put che protegge l'assicurato e scatta quando $\rho_t^{\text{base}} < 0$, riportando il tasso di rivalutazione al livello minimo garantito $\rho_t^{\text{gar}} = 0$. La componente put può anche essere scritta nella forma

$$\rho_t^{\text{put}} = \max\left(\rho_t^{\text{gar}} - \frac{\beta I_t - i}{1+i}\,,\,0\right) \quad ,$$

che è in un certo senso ridondante (perchè $\rho_t^{\text{gar}} = 0$), ma la rende più "riconoscibile" come opzione put.

Un altro modo interessante di vedere il fenomeno è la *scomposizione call* del tasso di rivalutazione:

$$\rho_t = \rho_t^{\text{gar}} + \rho_t^{\text{call}} \quad , \tag{212}$$

con

$$\rho_t^{\text{call}} = \rho_t - \rho_t^{\text{gar}} = \max\left(\frac{\beta I_t - i}{1+i} - \rho_t^{\text{gar}}\,,\,0\right) \quad , \tag{213}$$

che mostra come il tasso di rivalutazione possa essere visto come il suo livello minimo garantito più un'opzione call che retrocede l'eventuale sovrarivalutazione oltre quella minima garantita.

Osservazione 6.3.1. Si noti che il tasso di rivalutazione minimo garantito $\rho_t^{\text{gar}} = 0$ corrisponde ad un minimo per il rendimento di gestione di i. Come visto nel paragrafo 6.2.1, infatti, l'assicuratore si impegna contrattualmente a rivalutare gli attivi di almeno il tasso tecnico i, che rappresenta quindi il rendimento minimo garantito del contratto. Il livello $i/\beta \geq i$ è invece il livello del rendimento di gestione, al di sotto del quale l'assicuratore non riesce a trattenere la frazione $1-\beta$ del rendimento; è quindi un obiettivo "di secondo livello" per la gestione, essendo il tasso tecnico quello di "primo livello". □

Tralasciando il caso di retrocessione della rivalutazione sotto forma di cedole, nei casi più frequenti la regola di rivalutazione delle prestazioni è di tipo ricorrente. La componente opzionale della rivalutazione (put o call, a seconda del punto di vista) si applica ai livelli delle prestazioni risultati dalle rivalutazioni degli anni precedenti, nei quali le corrispondenti componenti opzionali potrebbero essere a loro volta scattate. Le componenti opzionali della rivalutazione di ogni anno vanno quindi a comporsi con quelle degli anni precedenti; sono pertanto opzioni *cliquet* (o *ratchet*), nelle quali la rivalutazione di ogni anno *consolida*. In particolare, non si possono compensare anni "cattivi", con rendimento di gestione insufficiente, con anni "buoni".

Esempio 6.3.1. Si consideri il caso di una polizza con $\beta = 80\%$, $i = 4\%$ e durata $n = 2$ anni. Si consideri il caso di $I_1 = 8\%$ e $I_2 = 3\%$. Come visto nell'analisi dell'esempio 6.2.1, nel primo anno il rendimento di gestione è ottimale:

$$\rho_1 = \max\left(\frac{80\% \times 8\% - 4\%}{1+4\%}\,,\,0\right) = \frac{2.4\%}{1.04} \approx 2.31\% \;.$$

Dal punto di vista della scomposizione put si ha pertanto

$$\rho_1^{\text{base}} = \rho_1 \approx 2.31\% \;, \qquad \text{e} \qquad \rho_1^{\text{put}} = \rho_1 - \rho_1^{\text{base}} = 0 \;.$$

La l'opzione put protettiva non scatta (non c'è nulla da proteggere) e la componente base coincide con il tasso di rivalutazione. Dal punto di vista della scomposizione call, risulta

$$\rho_1^{\text{gar}} = 0 \;, \qquad \text{e} \qquad \rho_1^{\text{call}} = \rho_1 - \rho_1^{\text{gar}} = \rho_1 \approx 2.31\% \;.$$

La componente call coincide con il tasso di rivalutazione, che è tutto sovrarivalutazione rispetto al minimo $\rho_1^{\text{gar}} = 0$.

Nel secondo anno la situazione è invece pessima:

$$\rho_2 = \max\left(\frac{80\% \times 3\% - 4\%}{1+4\%}\,,\,0\right) = 0,$$

l'utile retrocesso è nullo e, essendo $I_2 < i$, l'utile trattenuto è negativo: l'assicuratore deve integrare la riserva con il capitale proprio. Dal punto di vista della scomposizione put si ha

$$\rho_2^{\text{base}} = \frac{80\% \times 3\% - 4\%}{1 + 4\%} = -\frac{1.6\%}{1.04} \approx -1.54\% \ , \qquad \text{e} \qquad \rho_2^{\text{put}} = \rho_2 - \rho_2^{\text{base}} = \frac{1.6\%}{1.04} \approx 1.54\% \ .$$

Senza protezione la rivalutazione sarebbe stata negativa, ma la put protettiva integra la rivalutazione al livello minimo garantito. La scomposizione call risulta

$$\rho_2^{\text{gar}} = 0 \ , \qquad \text{e} \qquad \rho_2^{\text{call}} = \rho_2 - \rho_2^{\text{gar}} = \rho_2 = 0 \ .$$

Poiché I_2 è risultato insufficiente, non vi è sovrarivalutazione rispetto al minimo (anzi, c'è sottorivalutazione, compensata però dalla put protettiva).

Si osservi che, in questo esempio, l'assicuratore ha subito una perdita il secondo anno, nonostante il primo anno il rendimento della gestione separata sia risultato più che sufficiente. Avendo però retrocesso la sovrarivalutazione all'assicurato, non ha potuto utilizzarla per compensare il deficit del secondo anno. □

L'esempio 6.3.1 mostra come le opzioni di minimo garantito implicite nel meccanismo di rivalutazione, rappresentino un *rischio finanziario* non trascurabile per l'assicuratore. Nella pratica, le compagnie italiane "storiche" hanno ancora in essere molte polizze con rendimenti minimi garantiti al 4% o più. Queste polizze sono state vendute in anni in cui i rendimenti del mercato obbligazionario erano sufficientemente alti, ma pongono grossi problemi in questo periodo, in cui realizzare il 4% all'anno con una gestione prevalentemente obbligazionaria è molto difficile, se non impossibile.

Proprio per limitare il rischio finanziario delle opzioni implicite le compagnie italiane stanno sempre più orientandosi alla commercializzione di polizze con *rendimento minimo a scadenza*, dove il meccanismo di rivalutazione viene modificato in modo da consentire la compensazione, almeno parziale, fra anni "buoni" e anni "cattivi". L'idea, che non svilupperemo in questa sede, è quella di rimuovere il minimo dalla rivalutazione annuale, salvo poi effettuare un controllo al momento del pagamento della prestazione, per integrarla al minimo se necessario. Effettuando il controllo solo a scadenza, sulla rivalutazione globale, e non anno per anno, si ha la possibilità di compensazione tra anni diversi.

6.4 La valutazione delle polizze rivalutabili

6.4.1 I fattori di rivalutazione

Si consideri una polizza generica, stipulata al tempo zero da un assicurato di età x, con prestazioni vita e morte rivalutabili e premi, evenutalmente anch'essi rivalutabili. Sia $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y}^{\text{v}} + \boldsymbol{Y}^{\text{m}}$ il vettore delle prestazioni, scomposte in caso vita e caso morte, e $\boldsymbol{X}$ il vettore dei premi. Senza appesantire troppo le notazioni, le prestazioni vita e morte pagabili al tempo t possono essere scritte nella forma

$$\begin{aligned} Y_t^{\text{v}} &= Y_0^{\text{v}}\, \Phi^{Y,\text{v}}(0,t)\, \mathbf{1}_{\{T_x > t\}} \ , \\ Y_t^{\text{m}} &= Y_0^{\text{m}}\, \Phi^{Y,\text{m}}(0,t)\, \mathbf{1}_{\{t-1 < T_x \le t\}} \ , \end{aligned}$$

dove Y_0^{v} e Y_0^{m} sono i livelli iniziali delle prestazioni vita e morte, rispettivamente, $\Phi^{Y,\text{v}}(0,t)$ e $\Phi^{Y,\text{m}}(0,t)$ i corrispondenti *fattori di rivalutazione*.[20] I fattori di rivalutazione sono il rapporto

[20] In realtà occorrerebbe utilizzare anziché Y_0^{v} e Y_0^{m} una notazione più pesante, a doppio indice, per esplicitare la dipendenza da t dei livelli iniziali. Prestazioni pagabili a scadenza diverse possono infatti avere livelli iniziali diversi, come accade per esempio in una polizza a premio annuo con controassicurazione, dove il livello iniziale (non rivalutato) della prestazione caso morte al tempo t è $t\,\Pi$, che dipende da t. Si preferisce tuttavia non appesantire la notazione.

fra il livello (aleatorio) della prestazione che verrà effettivamente liquidata nel caso si verifichi l'evento corrispondente e il livello iniziale della stessa, noto alla stipula del contratto.

Analogamente il premio puro pagabile in t può essere scritto nella forma

$$X_t = X_0\, \Phi^X(0,t)\, \mathbf{1}_{\{T_x>t\}} \ \ ,$$

con X_0 il suo livello iniziale e $\Phi^X(0,t)$ il fattore di rivalutazione del premio fra zero e t.

Esempio 6.4.1. In una polizza di capitale differito di n anni a premio unico, con capitale assicurato iniziale C_0 che rivaluta in modo pieno, la prestazione caso morte è sempre nulla; per $t \neq n$, anche la prestazione caso vita è nulla, mentre si ha

$$Y_n^{\mathrm{v}} = C_0 \prod_{k=1}^{n} (1+\rho_k)\, \mathbf{1}_{\{T_x>n\}} \ \ .$$

Per $t \neq 0$ il premio è nullo, mentre

$$X_0 = U \ \ ,$$

essendo U il premio unico puro del contratto. Tralasciando i casi di prestazione nulla, si ha quindi che

$$\begin{aligned} Y_0^{\mathrm{v}} &= C_0 \ \ , \\ \Phi^{Y,\mathrm{v}}(0,n) &= \prod_{k=1}^{n} (1+\rho_k) \ \ , \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} X_0 &= U \ \ , \\ \Phi^X(0,0) &= 1 \ \ . \end{aligned}$$

Esempio 6.4.2. In una polizza mista a premio annuo costante P, con capitale assicurato iniziale C_0 che rivaluta secondo la regola degli ennesimi, le prestazioni caso morte e caso vita partono dallo stesso livello $Y_0 = C_0$ e rivalutano allo stesso modo. Possiamo alleggerire un po' la notazione, omettendo l'apice "v" o "m" nel livello iniziale e nel fattore di rivalutazione, che coincidono nei due casi:

$$\begin{aligned} Y_t^{\mathrm{m}} &= Y_0\, \Phi^Y(0,t)\, \mathbf{1}_{\{t-1<T_x\le t\}} \ \ , \qquad \text{per ogni } t = 1,\, 2,\, \dots,\, n \\ Y_n^{\mathrm{v}} &= Y_0\, \Phi^Y(0,n)\, \mathbf{1}_{\{T_x>n\}} \ \ . \end{aligned}$$

Il fattore di rivalutazione è

$$\Phi^Y(0,t) = \frac{C_t}{C_0} \ \ ,$$

essendo C_t calcolabile in modo ricorrente secondo la (208). Si verifica facilmente che anche $\Phi^Y(0,t)$ può essere calcolato in modo ricorrente, come soluzione[21] di

$$\begin{cases} \Phi^Y(0,0) = 1 \ \ , \\ \Phi^Y(0,t) = \Phi^Y(0,t-1)\,(1+\rho_t) - \dfrac{n-t}{n}\rho_t \ \ , \end{cases} \tag{214}$$

[21] Si può dimostrare (C. Pacati, *Valutazione di portafogli di polizza vita con rivalutazione agli ennesimi*, Gruppo di ricerca su "Modelli per la finanza matematica", Working paper **38**(aprile 2000)) che la soluzione in forma chiusa dell'equazione ricorrente (214) è

$$\Phi^Y(0,t) = \prod_{k=1}^{t}(1+\rho_k) - \sum_{k=0}^{t-1} \frac{n-t+k}{n}\rho_{t-k} \prod_{j=t-k+1}^{t}(1+\rho_j) \ \ .$$

Per quanto riguarda i premi, si ha $X_n = 0$, mentre per $0 \le t < n$ risulta

$$X_t = P\,\mathbf{1}_{\{T_x > t\}}$$

e quindi si ha $X_0 = P$ e $\Phi^X(0,t) = 1$ per ogni t. □

Esempio 6.4.3. Se modifichiamo l'esempio 6.4.2, prevedendo che premi e prestazioni siano rivaluabili in modo pieno, tutte le grandezza hanno lo stesso fattore di rivalutazione piena che, omettendo gli apici, risulta

$$\Phi(0,t) = \prod_{k=1}^{t} (1+\rho_k) \ . \quad \square$$

6.4.2 La valutazione

Nelle basi tecniche del I ordine, l'ipotesi finanziaria comporta che il rendimento di gestione sia noto, costante e che coincida con il tasso tecnico. Quindi, in una polizza rivalutabile, il tasso di rivalutazione è sempre nullo: nell'ipotesi del I ordine la rivalutazione non ha mai luogo. Per questo motivo nella tariffazione (calcolo del premio) e nella riservazione di una polizza rivalutabile secondo la logica attuariale tradizionale si ignora la regola di rivalutazione e si tratta la polizza come se fosse non rivalutabile.

Naturalmente l'ipotesi che $I_t = i$ per ogni t è assolutamente irrealistica: se il tasso tecnico è fissato in modo metodologicamente corretto, cioè prudenzialmente basso, il rendimento di gestione dovrebbe anzi risultare tipicamente maggiore del tasso tecnico. Se ci fosse la certezza che ciò accadrà in ogni anno, cioè che il rendimento di gestione risulti sempre sufficiente, il metodo tradizionale di calcolo sarebbe tutto sommato legittimo: fornirebbe un'approssimazione per eccesso – e quindi prudenziale – del valore degli impegni netti dell'assicuratore nei confronti dell'assicurato. Nell'analisi delle regole di rivalutazione si è infatti visto che se il surplus di rendimento di gestione rispetto al tasso tecnico è positivo, il salto di riserva dovuto alla rivalutazione, cioè l'utile retrocesso, si finanzia con parte del sovrarendimento degli attivi.

L'ipotesi di rendimento di gestione sempre sufficiente è tuttavia troppo ottimistica, come ben sanno le compagnie italiane che negli ultimi anni hanno visto crollare i rendimenti delle loro gestioni separate per effetto del crollo dei rendimenti obbligazionari (e nel segmento azionario le cose sono andate anche peggio). Il calcolo della riserva tradizionale, quindi, non solo *non è detto che sovrastimi il valore netto degli impegni*, ma anzi, trascurando la possibilità che l'assicuratore debba fare ricorso al capitale proprio per integrare le riserve, ne *può sottostimare il valore*. Equivalentemente, assegna valore nullo all'opzione put protettiva, che è presente nel contratto e che ha invece valore positivo.

Come visto nella sezione 5.4, nella valutazione RAD si abbandonano le basi tecniche del I ordine e si usa il rendimento atteso di gestione per ogni anno futuro. La tecnica di valutazione RAD si estende in maniera ovvia al caso delle polizze rivalutabili: i fattori di rivalutazione possono essere calcolati sostituendo ai rendimenti di gestione aleatori le loro aspettative. Anche la scomposizione dell'utile secondo la formula di Homans si estende immediatamente al caso rivalutabile. Rimane tuttavia il punto debole della metodologia, costituito dalle scelte dei rendimento attesi di gestione e del tasso RAD; questa debolezza è ancora più grave quando si applica il metodo RAD in presenza di opzioni. Sostituendo infatti il rendimento di gestione con la sua aspettativa, si valuta nell'ipotesi che l'opzione put protettiva scatti con certezza (se il rendimento atteso è insufficiente) o che non scatti con certezza (se il rendimento atteso è sufficiente). Quindi il valore RAD dell'opzione put protettiva risulta sovrastimato o, più spesso, sottostimato. Questo fenomeno è ormai ben compreso nella pratica e, nonstante il metodo RAD di calcolo del valore intrinseco sia uno standard di mercato, gli analisti spesso chiedono di conoscere il valore delle opzioni implicite, calcolato con metodologia più "robusta", per sottrarlo dal valore intrinseco RAD.

Per affrontare il problema in modo metodologicamente più corretto, si consideri la prestazione rivalutabile $Y_t = Y_0 \, \Phi(0,t) \, \mathbf{1}_A$, pagabile in t nel caso si verifichi l'evento A (vita dell'assicurato in t o sua morte in $(t-1,t]$). Se si accetta, come al solito, l'indipendenza fra gli eventi legati alla vita dell'assicurato e gli eventi dei mercati finanziari, che determinano i rendimenti di gestione e quindi $\Phi(0,t)$, il valore della prestazione può essere scomposto per linearità:

$$V(0,Y_t) = Y_0 \, V\big(0,\Phi(0,t)\big) \, \mathrm{prob}^{\mathrm{II}}(A) \ ,$$

dove $\mathrm{prob}^{\mathrm{II}}$ è la probabilità del II ordine, opportunamente fissata. Il calcolo del valore della prestazione si riduce quindi al calcolo del valore del fattore di rivalutazione. Poiché si tratta di una grandezza che dipende unicamente da grandezze di mercato, è metodologicamente corretto valutarla come se fosse il payoff di un contratto puramente finanziario, "dimenticando" il contratto assicurativo da cui proviene. Questa logica di valutazione fornisce quello che va sotto il nome di *valore mark-to-market* (*valore di mercato*) o anche *riserva stocastica* o *fair value* della prestazione.

Il calcolo del valore di mercato del fattore di rivalutazione deve essere effetuato tenendo conto delle caratteristiche della gestione separata. Per la presenza delle opzioni implicite è, sia in teoria che in pratica, analogo al calcolo del valore di un contratto derivato "complesso". L'unico caso in cui il procedimento di calcolo è semplice è quello degenere di prestazione (o premio) non rivalutabile. Se infatti la prestazione pagabile in t è non rivalutabile, si ha $\Phi(0,t) = 1$ e quindi $V\big(0,\Phi(0,t)\big)$ è il valore mercato di un titolo a cedola nulla unitario con scadenza in t, cioè il fattore di sconto in vigore sul mercato alla data di valutazioni per la scadenza t. Un caso un po' meno banale è proposto nell'appendice A.2.

Se si calcola il valore di mercato di tutte le prestazioni, si ottiene la *riserva stocastica prestazioni*

$$V(0,\boldsymbol{Y}) = \sum_{t>0} V(0,Y_t) \ ,$$

che naturalmente può essere scomposta nella riserva stocastica prestazioni vita e prestazioni morte. Allo stesso modo si calcola la *riserva stocastica premi*

$$V(0,\boldsymbol{X}) = \sum_{t>0} V(0,X_t) \ ,$$

trascurando il premio pagabile alla stipula, considerato già pagato. La *riserva stocastica* si ottiene come al solito per differenza.

$$V(0,\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X}) = V(0,\boldsymbol{Y}) - V(0,\boldsymbol{X}) \ .$$

Il confronto con la riserva di bilancio

$${}_0V_x^+ - V(0,\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X})$$

esprime la misura mark-to-market del valore degli utili della polizza, il *valore intrinseco stocastico*. La riserva di bilancio è infatti il valore degli attivi in mano all'assicuratore a copertura della polizza, mentre la riserva stocastica misura il valore effettivo del contratto, "immerso" nel mercato che ne determina la rivalutazione. La differenza esprime (in senso algebrico) la misura della sovracopertura di valore ed è il valore al tempo zero degli utili (in senso algebrico) che l'assicuratore potrà "staccare" dal contratto durante la sua vita.

Il valore di mercato delle opzioni implicite nella rivalutazione può essere evidenziato utilizzando le scomposizioni del tasso di rivalutazione viste nel paragrafo 6.3, che inducono analoghe scomposizioni delfattore di rivalutazione. La *scomposizione put* del fattore di rivalutazione è

$$\Phi(0,t) = \Phi^{\mathrm{base}}(0,t) + \Phi^{\mathrm{put}}(0,t) \ ,$$

dove $\Phi^{\text{base}}(0,t)$ è calcolato come $\Phi(0,t)$ ma con la successione dei tassi di rivalutazione base, mentre la componente put del fattore di valutazione è

$$\Phi^{\text{put}}(0,t) = \Phi(0,t) - \Phi^{\text{base}}(0,t) \ .$$

Il *valore base* della prestazione è allora

$$V^{\text{base}}(0,Y_t) = Y_0 \, V\big(0, \Phi^{\text{base}}(0,t)\big) \, \text{prob}^{\text{II}}(A)$$

e il valore dell'opzione put che protegge la prestazione è

$$V^{\text{put}}(0,Y_t) = V(0,Y_t) - V^{\text{base}}(0,Y_t) = Y_0 \, V\big(0, \Phi^{\text{put}}(0,t)\big) \, \text{prob}^{\text{II}}(A) \ .$$

Ripetendo l'analisi per tutte le prestazioni si ottiene per somma la scomposizione della riserva stocastica prestazioni in sua componente base componente put. Ripetendo per i premi e facendo le differenze si ha la stessa scomposizione a livello della riserva stocastica, ottenendo il valore netto dell'opzione put che protegge i minimi garantiti.

In modo analogo si procede con la *scomposizione call*. Il fattore di valutazione risulta scomposto in

$$\Phi(0,t) = \Phi^{\text{gar}}(0,t) + \Phi^{\text{call}}(0,t) \ ,$$

dove $\Phi^{\text{gar}}(0,t)$ è calcolato come $\Phi(0,t)$ ma usando ogni anno il livello minimo garantito del tasso di rivalutazione $\rho_k^{\text{gar}} = 0$ e si ottiene $\Phi^{\text{gar}}(0,t) = 1$. La componente call della scomposizione è

$$\Phi^{\text{call}}(0,t) = \Phi(0,t) - \Phi^{\text{gar}}(0,t) = \Phi(0,t) - 1 \ .$$

Anche in questo caso si estende la scomposizione al valore delle prestazioni, dei premi e alla riserva, ottenendo quindi il valore netto dell'opzione call che realizza l'eventuale sovrarivalutazione rispetto al minimo garantito.

Esempi di calcolo della riserva stocastica e del valore intrinseco stocastico, messo a confronto con il valore intrinseco RAD, sono proposti nella cartella Excel `lab7-8.xls`, usando i risultatati dell'appendice A.2.

Appendici[22]

A.1 Richiami sulla formula di Black e Scholes

Si richiama brevemente la formula di Black e Scholes, che verrà usata nella successiva appendice A.2, premettendo alcune definizioni e risultati sul moto Browniano geometrico.

A.1.1 Il moto Browniano geometrico

Definizione A.1.1. Un *moto Browniano standard*, detto anche *processo di Wiener*, è un processo stocastico Z_t, definito per $t \geq 0$, con $Z_0 = 0$, che soddifsa le seguenti proprietà:

1. per ogni t ed T, con $0 \leq t < T$, l'incremento $Z_T - Z_t$ è distribuito normalmente, con media zero e varianza $T - t$, cioè $Z_T - Z_t \sim N(0, T - t)$;

2. per ogni coppia $[t_1, T_1]$ e $[t_2, T_2]$ di intervalli temporali non sovrapposti, cioè tali che $0 \leq t_1 < T_1 \leq t_2 < T_2$, gli incrementi $Z_{T_1} - Z_{t_1}$ e $Z_{T_2} - Z_{t_2}$ sono variabili aleatorie indipendenti;

3. ogni traiettoria è continua.

Definizione A.1.2. Un *moto Browniano geometrico* è un processo stocastico S_t, definito per $t \geq 0$ da

$$S_t = S_0 \, \mathrm{e}^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma Z_t} \quad ,$$

dove Z_t è un moto Browniano standard e $S_0 > 0$, μ (*coefficiente di drift*) e $\sigma > 0$ (*volatilità*) sono costanti.

Osservazione A.1.3. Il moto Browniano geometrico S_t è un processo positivo ed è soluzione dell'equazione differenziale stocastica

$$\mathrm{d}S_t = S_t \, \mu \, \mathrm{d}t + S_t \, \sigma \, \mathrm{d}Z_t \quad ,$$

dove Z_t è un moto Browniano standard. □

Osservazione A.1.4. Il moto Browniano geometrico S_t ha distribuzione di probabilità condizionata lognormale, cioè per ogni t e T, con $0 \leq t \leq T$ si ha

$$\log \frac{S_T}{S_t} = \left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t) + \sigma \,(Z_T - Z_t) \sim N\left(\left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t) \, , \, \sigma^2 \,(T - t)\right)$$

e risulta quindi

$$\mathrm{E}_t\left(\log \frac{S_T}{S_t}\right) = \left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t) \quad , \qquad \mathrm{E}_t\,(S_T) = S_t \, \mathrm{e}^{\mu(T-t)} \quad ,$$

$$\mathrm{var}_t\left(\log \frac{S_T}{S_t}\right) = \sigma^2 \,(T - t) \quad , \qquad \mathrm{var}_t\,(S_T) = \left[\mathrm{E}_t\,(S_T)\right]^2 \left[\mathrm{e}^{\sigma^2(T-t)} - 1\right] \quad . \quad \square$$

A.1.2 La formula di Black e Scholes

Definizione A.1.5. Una *opzione finanziaria call europea* con sottostante S_t, prezzo di esercizio K e scadenza T è un contratto che alla data T prevede il pagamento

$$C_T = \max\,(S_T - K \, , \, 0) \quad .$$

Una *opzione finanziaria put europea* con sottostante S_t, prezzo di esercizio K e scadenza T è un contratto che alla data T prevede il pagamento

$$P_T = \max\,(K - S_T \, , \, 0) \quad .$$

[22] Il contenuto delle appendici è da considerarsi "facoltativo" (ma non "ininfluente"!) ai fini dell'esame.

Teorema A.1.6 (Formula di Black e Scholes). Si consideri un mercato perfetto, con un titolo di valore S_t che segue un moto Browniano geometrico con coefficiente di drift μ e volatilità σ e che non stacca dividendi né cedole. Si assuma che il segmento obbligazionario del mercato sia in condizioni di certezza e che esprima una legge esponenziale di equivalenza finanziaria, con intensità istantanea di interesse r. Il valore di mercato in $t < T$ dell'opzione finanziaria europea di tipo call, con sottostante S_t, prezzo di esercizio K e scadenza $T > t$ è

$$V(t, C_T) = S_t\, N(d_1) - K\, \mathrm{e}^{-r(T-t)}\, N(d_2) \ ,$$

dove N è la funzione di ripartizione della distribuzione normale standard e

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\log \frac{S_t}{K} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \ , \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \ . \end{aligned}$$

Il valore di mercato in $t < T$ dell'opzione put europea, con stesso sottostante, prezzo di esercizio e scadenza, è

$$V(t, P_T) = K\, \mathrm{e}^{-r(T-t)}\, N(-d_2) - S_t\, N(-d_1) \ . \quad \square$$

Si consideri ora al tempo t un contratto che, al tempo $T > t$ paga il valore del sottostante S_T con il minimo di K, cioè il payoff

$$X_T = \max(S_T\, ,\, K) \ .$$

Applicando le proprietà dell'operatore max, se ne può attuare la *scomposizione put*

$$X_T = S_T + \max(K - S_T\, ,\, 0) = S_T + P_T \ ,$$

che lo esprime come un portafoglio composto dal sottostante e da una opzione put che protegge il minimo garantito, o la *scomposizione call*

$$X_T = K + \max(S_T - K\, ,\, 0) \ ,$$

che lo propone come un portafoglio composto da un titolo a cedola nulla che paga l'importo certo K più una opzione call che paga l'eventuale maggior valore del sottostante rispetto al minimo garantito.

Corollario A.1.7. Nelle ipotesi del teorema A.1.6, si ha che

$$V(0, X_T) = S_t\, N(d_1) + K\, \mathrm{e}^{-r(T-t)}\, N(-d_2) \ .$$

Dimostrazione. Utilizzando la scomposizione put del payoff, possiamo valutare il contratto per linearità. Per l'assenza di arbitraggio si ha infatti che

$$V(0, S_T) = S_t \ ,$$

mentre la formula di Black e Scholes fornisce il valore della componente put

$$V(t, P_T) = K\, \mathrm{e}^{-r(T-t)}\, N(-d_2) - S_t\, N(-d_1) \ .$$

Quindi

$$\begin{aligned} V(t, X_T) &= V(0, S_T) + V(t, P_T) \\ &= S_t + K\, \mathrm{e}^{-r(T-t)}\, N(-d_2) - S_t\, N(-d_1) \end{aligned}$$

$$= S_t[1 - N(-d_1)] + K\,\mathrm{e}^{-r(T-t)}\,N(-d_2)\ .$$

Ricordando che N è la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria normale standard, cioè che

$$N(x) = \mathrm{prob}(\varepsilon < x)\ ,$$

dove $\varepsilon \sim N(0,1)$, si ha che

$$1 - N(-d_1) = 1 - \mathrm{prob}(\varepsilon < -d_1) = \mathrm{prob}(\varepsilon \geq -d_1) = \mathrm{prob}(-\varepsilon \leq d_1)\ .$$

Per le proprietà della distribuzione normale standard risulta che

$$\mathrm{prob}(-\varepsilon \leq d_1) = \mathrm{prob}(\varepsilon < d_1) = N(d_1)$$

e si è dimostrata la tesi.[23] □

A.2 Un esempio di valutazione mark to market di polizze rivalutabili

Si consideri una polizza vita rivalutabile con rivalutazione piena del capitale assicurato. La prestazione pagabile al tempo t è quindi del tipo

$$Y_t = Y_0\,\Phi(0,t)\,\mathbf{1}_A\ ,$$

dove Y_0 è il livello iniziale della prestazione,

$$\Phi(0,t) = \prod_{k=1}^{t}(1+\rho_t)$$

e A è l'evento il cui verificarsi in t determina il pagamento della prestazione (vita in t o morte dell'assicurato in $(t-1,t]$). Il valore di mercato della prestazione, accettando come al solito l'indipendenza degli eventi demografici da quelli dei mercati finanziari è

$$V(0,Y_t) = Y_0\,V\big(0,\Phi(0,t)\big)\,\mathrm{prob}^{\mathrm{II}}(A)\ ,$$

essendo $\mathrm{prob}^{\mathrm{II}}(A)$ la probabilità dell'evento A, calcolata secondo la probabilità del II ordine condivisa nel mercato, che assumeremo nota. L'unico problema è pertanto quello di determinare il valore del fattore di valutazione puramente finanziario $V\big(0,\Phi(0,t)\big)$. A tale fine assumeremo che:

- il valore degli attivi S_t della gestione separata segua un processo lognormale, con volatilità σ e livello iniziale S_0;
- il mercato obbligazionario sia in condizioni di certezza e che esprima una legge esponenziale di equivalenza finanziaria, con intensità istantanea di interesse r;
- il rendimento di gestione nell'anno $[k-1,k]$ sia espresso da

$$I_k = \frac{S_k - S_{k-1}}{S_k}\ .$$

[23] La dimostrazione poteva naturalmente essere condotta anche a partire dalla scomposizione call:

$$\begin{aligned}V(0,X_T) &= V(0,K) + V(t,C_T) = K\,\mathrm{e}^{-r(T-t)} + S_t\,N(d_1) - K\,\mathrm{e}^{-r(T-t)}\,N(d_2)\\ &= S_t\,N(d_1) + K\,\mathrm{e}^{-r(T-t)}[1 - N(d_2)] = S_t\,N(d_1) + K\,\mathrm{e}^{-r(T-t)}N(-d_2)\ .\end{aligned}$$

Osservazione A.2.1. Le ipotesi della valutazione appena esposte non sono adeguate al caso italiano, dove la normativa impone che le gestioni separate abbiano un contenuto prevalentemente obbligazionario. Modelli di mercato più adeguati sono però basati su processi stocastici molto più complessi del moto Browniano geometrico, che rendono l'analisi molto più complicata. I risultati della valutazione che otterremo in questo contesto modellistico più semplice potranno tuttavia essere considerati una "prima approssimazione".[24] □

A.2.1 Il calcolo del fattore di valutazione

Il calcolo del fattore di valutazione verrà condotto in due passi: verrà prima analizzato il caso $t = 1$ e poi il caso generale.

Lemma A.2.2. Se $t = 1$ si ha che

$$V(0, \Phi(0,1)) = \frac{1}{1+i}\left[(1-\beta)\,\mathrm{e}^{-r} + \beta\, N(d_1) + (i+\beta)\mathrm{e}^{-r}\, N(-d_2)\right] \ , \tag{215}$$

dove

$$d_1 = \frac{r - \log\left(1 + \frac{i}{\beta}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma} \ , \tag{216}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \tag{217}$$

e N è la funzione di ripartizione della distribuzione normale standard.

Dimostrazione. Applicando la definizione di ρ_1 e I_1 e le proprietà dell'operatore max, il payoff $\Phi(0,1)$, esigibile al tempo 1, può essere scritto nella forma

$$\begin{aligned}
\Phi(0,1) &= 1 + \rho_1 \\
&= \frac{1}{1+i}\left[1 + \max(\beta I_1\,,\, i)\right] \\
&= \frac{1}{1+i}\left[1 + \max\left(\beta\frac{S_1}{S_0} - \beta\,,\, i\right)\right] \\
&= \frac{1}{1+i}\left[1 - \beta + \beta\,\max\left(\frac{S_1}{S_0}\,,\, \frac{i+\beta}{\beta}\right)\right] \\
&= \frac{1}{1+i}\left[1 - \beta + \frac{\beta}{S_0}\,\max\left(S_1\,,\, \left(1+\tfrac{i}{\beta}\right)S_0\right)\right] \ .
\end{aligned}$$

Per linearità il suo valore di mercato in zero è

$$V(0, \Phi(0,1)) = \frac{1}{1+i}\left[(1-\beta)\,\mathrm{e}^{-r} + \frac{\beta}{S_0}\, V\left(0, \max\left(S_1\,,\, \left(1+\tfrac{i}{\beta}\right)S_0\right)\right)\right] \ . \tag{218}$$

Posto

$$K = \left(1 + \tfrac{i}{\beta}\right) S_0 \ ,$$

che è costante alla data di valutazione, per il corollario A.1.7 risulta

$$\begin{aligned}
V(0, \max(S_1\,,\, K)) &= S_0\, N(d_1) + K\,\mathrm{e}^{-r} N(-d_2) \\
&= \frac{S_0}{\beta}\left[\beta\, N(d_1) + (i+\beta)\,\mathrm{e}^{-r} N(-d_2)\right] \ ,
\end{aligned} \tag{219}$$

[24] Per degli esempi di valutazione metodologicamente corretti si veda C. Pacati (2003), *Financial Valuation of a New Generation Participating Life-Insurance Contract* e G. Castellani, M. De Felice, F. Moriconi e C. Pacati (2005), *Embedded Value in Life Insurance.*

dove

$$d_1 = \frac{\log \frac{S_0}{K} + r + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma} = \frac{r - \log\left(1 + \frac{i}{\beta}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma} \quad , \qquad\qquad d_2 = d_1 - \sigma \ .$$

Sostituendo nella (218) l'espressione (219) si ottiene l'asserto. □

Osservazione A.2.3. Poiché il membro destro della (215) non dipende da S_0, che riassume le condizioni di mercato alla data zero di valutazione, il risultato ottenuto nel lemma A.2.2 non dipende separatamente dalla data di valutazione zero e dalla scadenza 1, ma solo dalla durata unitaria. Se si pone pertanto

$$u = \frac{1}{1+i} \left[(1-\beta)\, \mathrm{e}^{-r} + \beta\, N(d_1) + (i+\beta)\, \mathrm{e}^{-r}\, N(-d_2) \right] \quad ,$$

si può estendere il risultato del lemma:

$$V\big(t-1, \Phi(t-1,t)\big) = u \qquad \text{per ogni } t > 0. \quad \square \tag{220}$$

Osservazione A.2.4. Il fattore unitario di valutazione u può essere scritto nella forma equivalente

$$u = \frac{1}{1+i} \left[(1+i)\, \mathrm{e}^{-r} + \beta\, N(d_1) - (i+\beta)\, \mathrm{e}^{-r}\, N(d_2) \right] \quad .$$

Infatti $N(-d_2) = 1 - N(d_2)$ e quindi

$$\begin{aligned}(1-\beta)\, \mathrm{e}^{-r} + (i+\beta)\, \mathrm{e}^{-r}\, N(-d_2) &= (1-\beta)\, \mathrm{e}^{-r} + (i+\beta)\, \mathrm{e}^{-r} - (i+\beta)\, \mathrm{e}^{-r}\, N(d_2) \\ &= (1+i)\, \mathrm{e}^{-r} - (i+\beta)\, \mathrm{e}^{-r}\, N(d_2) \ . \quad \square\end{aligned}$$

Teorema A.2.5. Per ogni $t > 0$ intero si ha

$$V\big(0, \Phi(0,t)\big) = u^t \quad , \tag{221}$$

Dimostrazione. La dimostrazione procede per induzione su t.
Per $t = 1$, base dell'induzione, l'asserto è stato dimostrato nel lemma A.2.2.
Assunto quindi vero il risultato per $t-1$:

$$V\big(0, \Phi(0,t-1)\big) = u^{t-1} \quad ,$$

osserviamo anzitutto che, per l'assenza di arbitraggi non rischiosi[25], risulta

$$V\big(0, \Phi(0,t)\big) = V\left(0, V\big(t-1, \Phi(0,t)\big)\right) \quad .$$

Poiché

$$\Phi(0,t) = \prod_{k=1}^{t} (1+\rho_k) = \left[\prod_{k=1}^{t-1} (1+\rho_k) \right] (1+\rho_t) = \Phi(0,t-1)\, \Phi(t-1,t) \quad ,$$

si ottiene quindi che

$$V\big(0, \Phi(0,t)\big) = V\left(0, V\big(t-1, \Phi(0,t-1)\, \Phi(t-1,t)\big)\right)$$

[25]Se si considera al tempo t un contratto che al tempo $s > t$ paga l'importo X_s, per l'ipotesi di assenza di arbitraggi non rischiosi è sempre vero che per ogni data intermedia T ($t \le T \le S$) il contratto che paga in T l'importo $Y_T = V(T, X_s)$ ha prezzo si mercato in t

$$V(t, Y_T) = V\big(t, V(T, X_s)\big) = V(t, X_s) \quad .$$

Il fattore $\Phi(0,t-1)$ è noto alla data $t-1$ e per la proprietà di indipendenza dall'importo si ha quindi che

$$V\big(t-1,\Phi(0,t-1)\,\Phi(t-1,t)\big) = \Phi(0,t-1)\,V\big(t-1,\Phi(t-1,t)\big) = \Phi(0,t-1)\,u \ \ .$$

Sostituendo si ottiene che

$$V\big(0,\Phi(0,t)\big) = V\left(0,\Phi(0,t-1)\,u\right) \ \ .$$

Poiché u è una costante, usando nuovamente l'indipendenza dall'importo e applicando l'ipotesi induttiva si ha

$$V\big(0,\Phi(0,t)\big) = u\,V\left(0,\Phi(0,t-1)\right) = u\,u^{t-1} = u^t \ \ ,$$

che conclude la dimostrazione. □

Per concludere l'analisi è opportuno calcolare le scomposizoni put e call del fattore di valutazione. Esse inducono naturalmente le scomposizioni put e call del valore della prestazione.

A.2.2 La scomposizione put del fattore di valutazione

La scomposizione put del fattore di rivalutazione è

$$\Phi(0,t) = \Phi^{\text{base}}(0,t) + \Phi^{\text{put}}(0,t) \ \ ,$$

dove $\Phi^{\text{base}}(0,t)$ è calcolato come $\Phi(0,t)$ ma con la successione dei tassi di rivalutazione base

$$\rho_k^{\text{base}} = \frac{\beta I_k - i}{1+i} \ \ ,$$

cioè

$$\Phi^{\text{base}}(0,t) = \prod_{k=1}^{t}\left(1+\rho_k^{\text{base}}\right) \ \ ,$$

e la componente put del fattore di valutazione è

$$\Phi^{\text{put}}(0,t) = \Phi(0,t) - \Phi^{\text{base}}(0,t) \ \ .$$

Lemma A.2.6. Se $t=1$ si ha che

$$V\big(0,\Phi^{\text{base}}(0,1)\big) = \frac{1}{1+i}\left[(1-\beta)\,\mathrm{e}^{-r}+\beta\right] \ \ . \qquad (222)$$

Dimostrazione. Ripetendo l'analisi fatta per $\Phi(0,1)$ nella dimostrazione del lemma A.2.2, si ha che

$$\begin{aligned}
\Phi^{\text{base}}(0,1) &= 1+\rho_1^{\text{base}} \\
&= \frac{1}{1+i}\left(1+\beta I_1\right) \\
&= \frac{1}{1+i}\left(1+\beta\frac{S_1}{S_0}-\beta\right) \\
&= \frac{1}{1+i}\left(1-\beta+\frac{\beta}{S_0}S_1\right) \ \ .
\end{aligned}$$

Il valore di mercato del fattore di rivalutazione base è quindi per linearità

$$V\big(0,\Phi^{\text{base}}(0,1)\big) = \frac{1}{1+i}\left[(1-\beta)\,\mathrm{e}^{-r}+\beta\right] \ \ .$$ □

Osservazione A.2.7. Come nel caso del fattore di valutazione complessivo, anche il fattore di rivalutazione base unitario dipende solo dalla durata unitaria del periodo di valutazione. Se poniamo quindi

$$b = \frac{1}{1+i}\left[(1-\beta)\,\mathrm{e}^{-r} + \beta\right] \quad ,$$

che è costante, per ogni $t \geq 0$ si ha che

$$V\big(t-1, \Phi^{\text{base}}(t-1,t)\big) = b \ . \quad \square$$

Teorema A.2.8. Per ogni $t > 0$ intero si ha che

$$V\big(0, \Phi^{\text{base}}(0,t)\big) = b^t \ . \tag{223}$$

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga a quella del teorema A.2.5. $\square$

Corollario A.2.9. Il valore della componente put del fattore di valutazione è

$$V\big(0, \Phi^{\text{put}}(0,t)\big) = V\big(0, \Phi(0,t)\big) - V\big(0, \Phi^{\text{base}}(0,t)\big) = u^t - b^t \ . \quad \square$$

A.2.3 La scomposizione call del fattore di valutazione

La determinazione delle componenti della scomposizione call del fattore di valutazione è più semplice. La scomposizione call del fattore di rivalutazione è

$$\Phi(0,t) = \Phi^{\text{gar}}(0,t) + \Phi^{\text{call}}(0,t) \quad ,$$

dove $\Phi^{\text{gar}}(0,t)$ è calcolato come $\Phi(0,t)$ ma usando ogni anno il livello minimo garantito del tasso di rivalutazione $\rho_k^{\text{gar}} = 0$; si ottiene $\Phi^{\text{gar}}(0,t) = 1$. La componente call della scomposizione è

$$\Phi^{\text{call}}(0,t) = \Phi(0,t) - \Phi^{\text{gar}}(0,t) \ .$$

I relativi valori di mercato sono pertanto

$$\begin{aligned} &V\big(0, \Phi^{\text{gar}}(0,t)\big) = \mathrm{e}^{-rt} \quad , \\ &V\big(0, \Phi^{\text{call}}(0,t)\big) = V\big(0, \Phi(0,t)\big) - V\big(0, \Phi^{\text{gar}}(0,t)\big) = u^t - \mathrm{e}^{-rt} \ . \end{aligned}$$

Un esempio di applicazione delle formule di valutazione ottenute in questa sezione è proposto nella cartella Excel `lab7-8.xls`.