spreco dal punto di vista sociale. D'altra parte, l'acquisto di segnali può contribuire a risolvere i problemi connessi all'informazione asimmetrica.

7. Uno schema di incentivi efficiente (posto che la prestazione sia perfettamente osservabile) deve lasciare al lavoratore un interesse residuale sull'output. In questo modo egli sceglierà un livello di impegno in corrispondenza del quale i benefici marginali siano uguali ai costi marginali.

8. In presenza di informazione imperfetta questo non è più vero. In genere, sarà appropriato uno schema che oltre a fornire incentivi consenta di condividere il rischio.

Domande

1. Consideriamo il modello del mercato delle automobili usate presentato in questo capitolo. Quale sarà, nell'equilibrio di mercato, il massimo surplus che deriva al consumatore dallo scambio?

2. Nello stesso modello, quale sarà il surplus del consumatore prodotto se si combinano *a caso* acquirenti e venditori? Quale metodo permette di ottenere un surplus maggiore?

3. Un lavoratore è in grado di produrre x unità di output al costo $c(x) = x^2/2$. L'utilità di occupazioni alternative è $\overline{u} = 0$. Se si desidera fornirgli un incentivo offrendogli un lavoro salariato, quale sarà lo schema ottimo $s(x)$?

4. Dato quanto abbiamo assunto nel precedente esercizio, quale canone d'affitto il lavoratore sarà disposto a versare?

5. Quale sarebbe la soluzione del precedente esercizio se l'utilità derivante da un'occupazione alternativa fosse $\overline{u} = 1$?

APPENDICE MATEMATICA

In questa Appendice forniamo una breve rassegna dei principali concetti matematici usati nel testo, semplicemente per richiamare le definizioni di vari termini impiegati. Sottolineiamo che questa Appendice non è un corso introduttivo di matematica. Le definizioni saranno in genere le più semplici, non le più rigorose.

A.1 Funzioni

Una **funzione** è una regola che descrive una relazione tra numeri, tale da associare a ciascun numero x, un *unico* numero y. Una funzione può così essere descritta designando la regola di calcolo, per esempio "si prenda un numero e lo si elevi al quadrato", oppure "si prenda un numero e lo si moltiplichi per 2", e così via. Scriveremo queste particolari funzioni come $y = x^2$, $y = 2x$. Le funzioni sono talvolta definite **trasformazioni**.

In alcuni casi vogliamo indicare che qualche variabile y dipende da qualche altra variabile x, senza precisare la specifica relazione algebrica tra le due variabili. In questo caso scriviamo $y = f(x)$, che significa che la variabile y dipende da x secondo la regola f.

Data una funzione $y = f(x)$, il numero x è spesso chiamato **variabile indipendente**, e y **variabile dipendente**: ciò significa che x varia in modo indipendente, mentre il valore di y *dipende* da quello di x.

Qualche variabile y può dipendere da diverse variabili x_1, x_2 ecc. In questo caso scriviamo $y = f(x_1, x_2)$, per indicare che entrambe le variabili determinano il valore di y.

A.2 Grafici

Un **grafico** di una funzione ne rappresenta graficamente l'andamento. Nella Figura A.1 sono riportati i grafici di due funzioni. Normalmente la variabile indipendente è rappresentata sull'asse orizzontale, e quella dipendente sull'asse verticale. Il grafico rappresenta la relazione tra le due variabili.

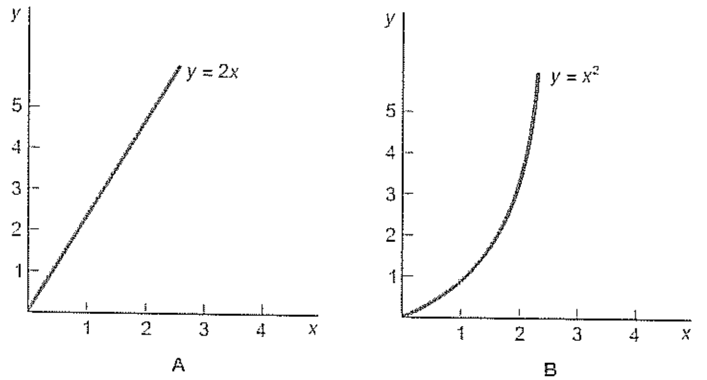

Figura A.1 **Grafici di funzioni.** (A) Grafico della funzione $y = 2x$. (B) Grafico della funzione $y = x^2$.

Gli economisti, tuttavia, costruiscono comunemente i grafici rappresentando la variabile indipendente sull'asse verticale e quella dipendente sull'asse orizzontale. La funzione di domanda, per esempio, è rappresentata comunemente ponendo il prezzo sull'asse verticale e la quantità domandata sull'asse orizzontale.

A.3 Proprietà delle funzioni

Una funzione **continua** è una funzione che può essere disegnata senza sollevare la matita dal foglio: in una funzione continua non vi sono salti. Una funzione derivabile o **"liscia"** è una funzione che non presenta "angoli" o spigoli. Una funzione **monotòna** è una funzione costantemente crescente o decrescente: una **funzione monotòna positiva** è costantemente crescente al crescere di x, mentre una **funzione monotòna negativa** è costantemente decrescente al crescere di x.

A.4 Funzioni inverse

Si ricordi che una funzione è una relazione che associa a ciascun valore di x un unico valore di y, e che una funzione monotona è una funzione costantemente crescente o decrescente. Ne consegue che per una funzione monotona vi sarà un unico valore di x associato a ciascun valore di y.

Una funzione che metta in relazione x e y in questo modo è chiamata **funzione inversa**. Se è noto il valore di y in funzione di x, è possibile calcolare la funzione inversa semplicemente risolvendo per x in funzione di y. Se $y = 2x$, la funzione inversa sarà $x = y/2$. Se $y = x^2$, non vi sarà funzione inversa: per qualsiasi y, il suo valore potrà essere ottenuto elevando al quadrato sia $x = +\sqrt{y}$ che $x = -\sqrt{y}$, e non vi sarà quindi un *unico* valore di x associato a ciascun valore di y.

A.5 Equazioni e identità

Un'**equazione** è un'uguaglianza tra una funzione e un numero. Esempi di equazioni sono

$$2x = 8$$
$$x^2 = 9$$
$$f(x) = 0.$$

La **soluzione** di un'equazione è un valore di x che la soddisfi. La soluzione della prima equazione è $x = 4$. La seconda equazione ha due soluzioni, $x = 3$ e $x = -3$. La terza è un'equazione generica: non potremo conoscerne la soluzione fino a che non sarà precisata l'effettiva regola rappresentata da f. Possiamo, tuttavia, denotare la soluzione con x^*. Ciò significa semplicemente che x^* è un numero tale che $f(x^*) = 0$. Si dice in questo caso che x^* **soddisfa** l'equazione $f(x) = 0$.

Un'**identità** è una relazione tra variabili valida per *qualsiasi* valore delle variabili. Esempi di identità sono

$$(x + y)^2 \equiv x^2 + 2xy + y^2$$
$$2(x + 1) \equiv 2x + 2.$$

Il simbolo $\equiv$ significa che il membro di destra e quello di sinistra sono uguali per *qualsiasi* valore delle variabili. Un'equazione è valida solo per alcuni valori delle variabili, mentre un'identità è vera per qualsiasi valore delle variabili. Spesso un'identità è vera per la definizione stessa dei termini.

A.6 Funzioni lineari

Una **funzione lineare** è una funzione del tipo

$$y = ax + b$$

dove a e b sono costanti. Esempi di funzioni lineari sono

$$y = 2x + 3$$
$$y = x - 99.$$

A rigore, una funzione del tipo $y = ax+b$ dovrebbe essere chiamata **funzione affine**, mentre dovrebbero essere chiamate funzioni lineari solo quelle del tipo $y = ax$. Noi non ricorreremo tuttavia a questa distinzione.

Le funzioni lineari possono anche essere espresse in forma implicita come $ax + by = c$. In tal caso, possono essere convertite nella forma usuale risolvendo per y in funzione di x:

$$y = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}x.$$

A.7 Variazioni e saggi di variazione

La notazione Δx significa "variazione di x". *Non* significa il prodotto di Δ per x. Se x varia da x^* a x^{**}, la variazione di x sarà

$$\Delta x = x^{**} - x^*.$$

Possiamo anche scrivere

$$x^{**} = x^* + \Delta x$$

per indicare che x^{**} è uguale alla somma di x^* e della variazione di x.

Tipicamente Δx rappresenta una *piccola* variazione di x, o, in altre parole, una **variazione marginale**.

Il **saggio di variazione** è il rapporto tra due variazioni. Se y dipende da x secondo la funzione $y = f(x)$, il saggio di variazione di x rispetto a y è rappresentato come

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Il saggio di variazione misura la variazione di y al variare di x.

Nel caso di una funzione lineare, il saggio di variazione di y rispetto a x è costante. Per provarlo, si noti che se $y = a + bx$, allora

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a + b(x + \Delta x) - a - bx}{\Delta x} = \frac{b\Delta x}{\Delta x} = b.$$

Nel caso di funzioni non lineari, il saggio di variazione della funzione dipenderà dal valore di x. Consideriamo, per esempio, la funzione $y = x^2$. Per questa funzione

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

In questo caso il saggio di variazione da x a $x + \Delta x$ dipende dal valore di x e dalla misura della variazione, Δx. Se si considera una variazione molto piccola di x, Δx sarà approssimativamente uguale a zero, e quindi il saggio di variazione di y rispetto a x sarà approssimativamente $2x$.

A.8 Inclinazione e intercetta

Dal punto di vista della sua rappresentazione grafica, il saggio di variazione di una funzione corrisponde all'**inclinazione** di quella funzione. La Figura A.2 rappresenta una funzione lineare $y = -2x + 4$. L'**intercetta verticale** di questa funzione corrisponde al valore di y quando $x = 0$, cioè $y = 4$. L'intercetta orizzontale corrisponde al valore di x quando $y = 0$, cioè $x = 2$. L'inclinazione della funzione corrisponde al saggio di variazione di y al variare di x. In questo caso, l'inclinazione della funzione è -2.

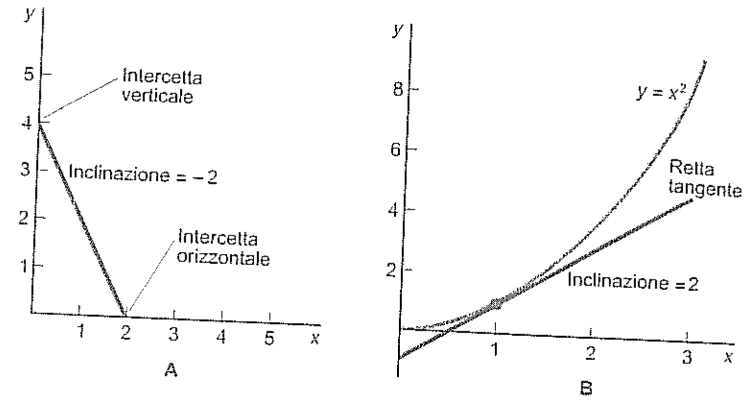

Figura A.2 **Inclinazione e intercetta.** Il quadro A rappresenta la funzione $y = -2x + 4$ e il quadro B la funzione $y = x^2$.

In generale, se una funzione lineare ha la forma $y = ax + b$, l'intercetta verticale sarà $y^* = b$ e l'intercetta orizzontale sarà $x^* = -b/a$. Se una funzione lineare è rappresentata nella forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 = c$$

l'intercetta orizzontale corrisponderà al valore di x_1 quando $x_2 = 0$, cioè $x_1^* = c/a_1$, e l'intercetta verticale al valore di x_2 quando $x_1 = 0$, cioè $x_2^* = c/a_2$. L'inclinazione di questa funzione sarà $-a_1/a_2$.

L'inclinazione di una funzione non lineare varia al variare di x. Una retta **tangente** a una funzione in un punto x è una funzione lineare che abbia la stessa inclinazione della funzione in quel punto. La Figura A.2 rappresenta la funzione x^2 e la retta tangente in $x = 1$.

Se y aumenta ogni volta che aumenta x, Δy avrà lo stesso segno di Δx, e quindi la funzione avrà inclinazione positiva. Se, al contrario, y diminuisce all'aumentare di x, o y aumenta al diminuire di x, Δy e Δx avranno segni diversi, e la funzione avrà inclinazione negativa.

A.9 Valore assoluto e logaritmi

Il valore assoluto di un numero è una funzione $f(x)$ tale che:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

È possibile cioè determinare il valore assoluto di un numero semplicemente eliminandone il segno. Il valore assoluto di x si scrive generalmente $|x|$.

Il **logaritmo** (naturale) di x rappresenta una particolare funzione di x, che scriviamo $y = \ln x$ o $y = \ln(x)$. Il logaritmo è una funzione che gode delle seguenti proprietà

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$$

per qualsiasi numero positivo x e y e

$$\ln(e) = 1.$$

(In questa equazione, e è la base dei logaritmi naturali, ed è uguale a $2,7183\ldots$) La prima delle espressioni precedenti significa che il logaritmo del prodotto di due numeri è uguale alla somma dei logaritmi dei due numeri. Questa proprietà implica la seguente:

$$\ln(x^y) = y\ln(x)$$

cioè il logaritmo di x elevato alla potenza y è uguale al prodotto di y per il logaritmo di x.

A.10 Derivate

La **derivata** di una funzione $y = f(x)$ è definita come

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

La derivata è il limite del saggio di variazione di y rispetto a x al tendere a zero della variazione di x. La derivata consente di attribuire un significato preciso all'espressione "il saggio di variazione di y rispetto a x per piccole variazioni di x". La derivata di $f(x)$ rispetto a x è anche scritta $f'(x)$.

Abbiamo già visto che il saggio di variazione di una funzione lineare $y = ax + b$ è costante. Quindi, per questa funzione lineare

$$\frac{df(x)}{dx} = a.$$

Per una funzione non lineare il saggio di variazione di y rispetto a x dipenderà in genere da x. Come si ricorderà, nel caso di $f(x) = x^2$, si aveva $\Delta y/\Delta x = 2x + \Delta x$. Quindi, per la definizione di derivata:

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x = 2x.$$

La derivata di x^2 rispetto a x è pertanto $2x$.

Si può dimostrare, con metodi più avanzati, che se $y = \ln x$, allora

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{x}.$$

A.11 Derivate seconde

La **derivata seconda** di una funzione è la derivata della derivata di quella funzione. Se $y = f(x)$, scriviamo $d^2f(x)/dx^2$, o $f''(x)$, la derivata seconda di $f(x)$ rispetto a x. Sappiamo che

$$\frac{d(2x)}{dx} = 2$$

$$\frac{d(x^2)}{dx} = 2x.$$

Pertanto

$$\frac{d^2(2x)}{dx^2} = \frac{d(2)}{dx} = 0$$

$$\frac{d^2(x^2)}{dx^2} = \frac{d(2x)}{dx} = 2.$$

La derivata seconda misura la curvatura di una funzione. Una funzione la cui derivata seconda sia negativa in corrispondenza di un punto, è concava in un intorno di quel punto, e la sua inclinazione è decrescente. Una funzione la cui derivata seconda sia positiva in corrispondenza di un punto, è convessa in un intorno di quel punto, e la sua inclinazione è crescente. Una funzione la cui derivata seconda sia nulla in un punto, è piatta in un intorno di quel punto.

A.12 Derivata del prodotto di funzioni e derivata di funzioni composte

Supponiamo che $g(x)$ e $h(x)$ siano ambedue funzioni di x. È possibile definire la funzione $f(x)$, che rappresenta il loro prodotto, come $f(x) = g(x)h(x)$. La derivata di $f(x)$ sarà quindi

$$\frac{df(x)}{dx} = g(x)\frac{dh(x)}{dx} + h(x)\frac{dg(x)}{dx}.$$

Date due funzioni $y = g(x)$ e $z = h(y)$, la funzione **composta** è

$$f(x) = h(g(x)).$$

Per esempio, se $g(x) = x^2$ e $h(y) = 2y + 3$, la funzione composta è

$$f(x) = 2x^2 + 3.$$

La **regola di derivazione delle funzioni composte** stabilisce che la derivata di una funzione composta, $f(x)$, rispetto a x, è

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{dh(y)}{dy}\frac{dg(x)}{dx}.$$

Nel nostro esempio, $dh(y)/dy = 2$ e $dg(x)/dx = 2x$, quindi, per la regola di derivazione delle funzioni composte, $df(x)/dx = 2 \times 2x = 4x$. Calcolando direttamente la derivata della funzione $f(x) = 2x^2 + 3$, si verificherà che essa è uguale a quella individuata applicando questa regola di derivazione.

A.13 Derivate parziali

Supponiamo che y dipenda sia da x_1 che da x_2, cioè che $y = f(x_1, x_2)$. La **derivata parziale** di $f(x_1, x_2)$ rispetto a x_1 è definita come

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2) - f(x_1, x_2)}{\Delta x_1}.$$

La derivata parziale di $f(x_1, x_2)$ rispetto a x_1 non è altro che la derivata della funzione rispetto a x_1, *se x_2 viene mantenuto fisso*. Analogamente, la derivata parziale rispetto a x_2 è

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \lim_{\Delta x_2 \to 0} \frac{f(x_1, x_2 + \Delta x_2) - f(x_1, x_2)}{\Delta x_2}.$$

Le derivate parziali godono delle stesse proprietà delle derivate ordinarie, in particolare, vale anche per esse la regola di derivazione delle funzioni composte, anche se con una modifica significativa. Supponiamo che x_1 e x_2 siano ambedue variabili dipendenti di qualche variabile t, e definiamo la funzione $g(t)$ come

$$g(t) = f(x_1(t), x_2(t)).$$

Quindi la derivata di $g(t)$ rispetto a t sarà

$$\frac{dg(t)}{dt} = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}\frac{dx_1(t)}{dt} + \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}\frac{dx_2(t)}{dt}.$$

Al variare di t, varieranno sia $x_1(t)$ che $x_2(t)$, e quindi si dovrà calcolare la derivata di $f(x_1, x_2)$ rispetto a ciascuna di queste variazioni.

A.14 Ottimizzazione

Se $y = f(x)$, allora il punto x^* sarà detto **massimo** di $f(x)$ se $f(x^*) \geq f(x)$ per qualsiasi valore di x. Si può dimostrare che se $f(x)$ è una funzione sufficientemente derivabile o "liscia" il cui massimo sia x^*, allora

$$\frac{df(x*)}{dx} = 0$$
$$\frac{d^2 f(x^*)}{dx^2} \leq 0.$$

Queste espressioni sono definite **condizione del primo ordine** e **condizione del secondo ordine** del problema di massimizzazione. La condizione del primo ordine stabilisce che la funzione è piatta in corrispondenza di x^*, e la condizione del secondo ordine che la funzione è concava in un intorno di x^*. Evidentemente entrambe queste proprietà devono valere perché x^* sia un punto di massimo.

Diremo d'altra parte che x^* è un punto di **minimo** per $f(x)$ se $f(x^*) \leq f(x)$ per qualsiasi valore di x. Se $f(x)$ è una funzione "liscia" il cui minimo è x^*, allora

$$\frac{df(x^*)}{dx} = 0$$
$$\frac{d^2 f(x^*)}{dx^2} \geq 0.$$

La condizione del primo ordine stabilisce, come prima, che la funzione è piatta in corrispondenza di x^*, mentre la condizione del secondo ordine ora afferma che la funzione è convessa in un intorno di x^*.

Se $y = f(x_1, x_2)$ è una funzione "liscia" il cui massimo o il cui minimo sia qualche punto (x_1^*, x_2^*), allora deve essere che

$$\frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} = 0$$
$$\frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} = 0.$$

Sono queste le **condizioni del primo ordine** di questo problema. Esistono anche condizioni del secondo ordine, ma descriverle va al di là dei nostri scopi.

A.15 Ottimizzazione vincolata

Spesso intendiamo determinare il massimo o il minimo di una funzione per qualche insieme ristretto dei valori di (x_1, x_2). La notazione

$$\max_{x_1, x_2} f(x_1, x_2)$$
$$\text{tale che } g(x_1, x_2) = c$$

significa: si determinino due valori x_1^* e x_2^* tali che $f(x_1^*, x_2^*) \geq f(x_1, x_2)$ per tutti i valori di x_1 e x_2 che soddisfano l'equazione $g(x_1, x_2) = c$.

La funzione $f(x_1, x_2)$ è detta **funzione obiettivo**, e l'equazione $g(x_1, x_2) = c$ è detta **vincolo**. Alcuni metodi per risolvere problemi di massimizzazione vincolata di questo tipo sono descritti nell'Appendice al Capitolo 5.